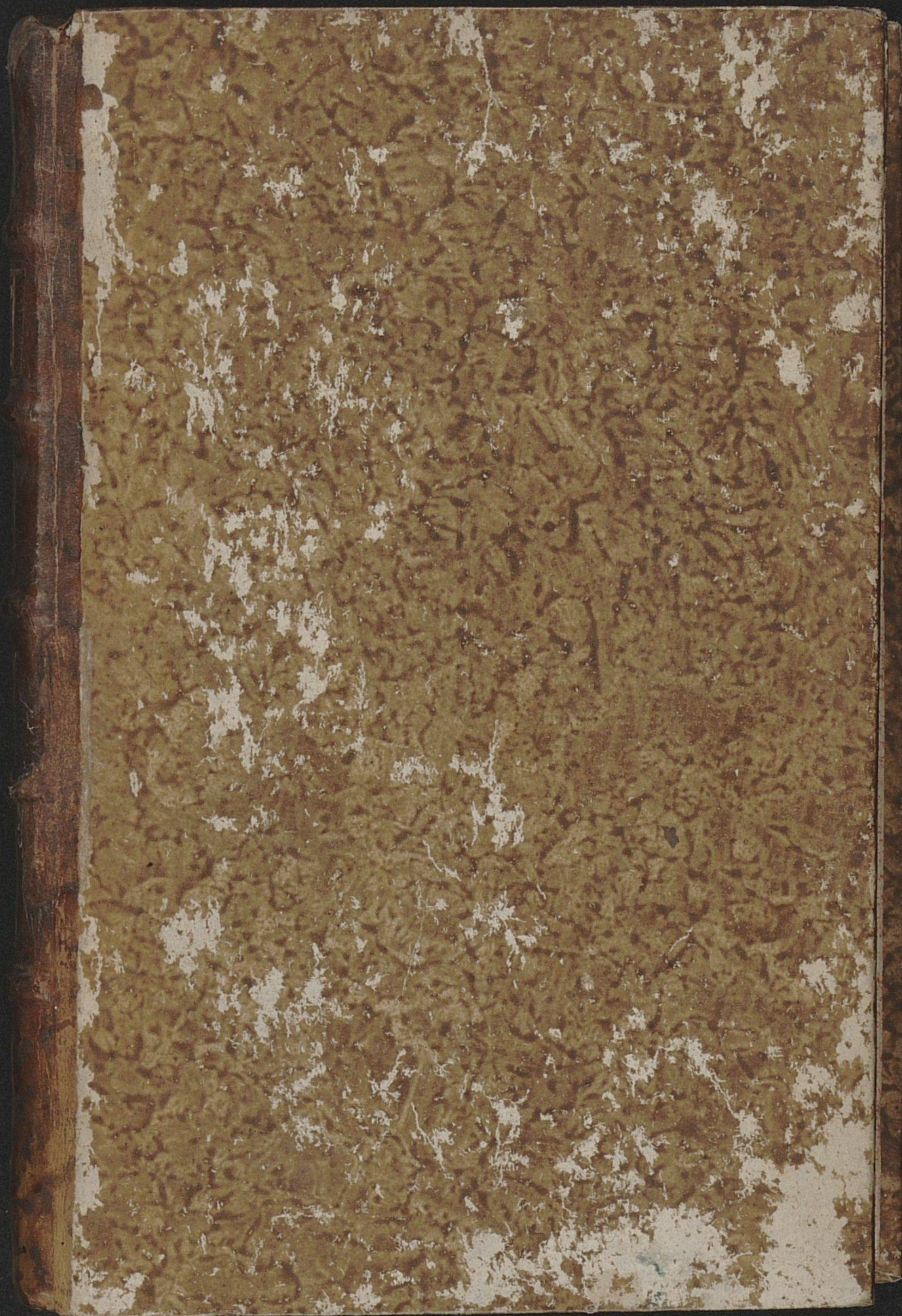


500 —

ÉLÉMENS DES FORCES CENTRALES,

OU

OBSERVATIONS SUR LES LOIX que ſuivent les Corps mûs autour de leur centre de peſanteur;

Suivies d'un jugement de l'Académie Royale des Sciences ſur pluſieurs de ces Obſervations, & d'un Examen critique de ce même jugement, à quoi on a joint un Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides, & quelques Obſervations ſur la nature des Courbes quarrables & rectifiables.

Par M. le Chevalier DE FORBIN.



A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

PRÉFACE.

On s'eſt propoſé deux objets principaux, dans cet Ouvrage, qui ont déterminé à le rendre public. Le premier de développer les vrais principes des forces centrales, ou des loix que ſuivent les corps mûs autour de leur centre de peſanteur, en procédant méthodiquement & par les voies les plus ſimples & le plus à portée du commun des Géomètres. Le ſecond de manifeſter les erreurs dans leſquelles lès plus grands Géomètres ſont tombés, & tombent même encore tous les jours, pour n'avoir pas toujours ſuivi la loi rigoureuſe qu'impoſe la Géométrie, dans la recherche de la vérité, de ne jamais fonder les démonſtrations qui de-

vroient l'établir que ſur les principes les plus clairs, & les plus évidens. Il n'eſt pas croyable à quel point l'on s'eſt égaré ici, pour avoir abandonné cette route, & combien d'erreurs, même groſſieres, ſont transformées en prétendues vérités mathématiques ? Les ouvrages de M. Newton, ſur-tout, fourmillent en ce genre, de transformation d'erreurs réelles en vérités apparentes. On eſt effrayé à la vue de cette multitude de cas que ce célèbre Géomètre a enviſagés, & de cette immenſe quantité de forces centripètes qu'il a fallu ſuppoſer pour les réſoudre. Mais ces forces ſont-elles auſſi réelles & auſſi poſſibles que M. Newton le ſuppoſe? Leur Auteur a-t-il démontré leur poſſibilité & leur réalité, avant que d'aſſigner le lieu de leur réſidence ? A-t-il prouvé que les effets, par leſquels il les repréſente, dûſſent véri-

tablement leur appartenir? Ces questions ſont faciles à réſoudre en ouvrant les ouvrages mêmes de M. Newton, où l'on ne voit pas qu'il ait jamais cherché à s'aſſurer ſi telles ou telles forces, ſuppoſées dans tels cas & dans telles circonſtances, étoient poſſibles, ou non. Et ſi les effets par leſquels il lui a plû de les repréſenter devoient véritablement leur être attribués. Par exemple, dans les courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un point fixe, par le mouvement angulaire du rayon vecteur, à la maniere des courbes fermées & révolutives, M. Newton ne met ſeulement pas en queſtion s'il eſt poſſible ou non, que le mouvement angulaire, dont l'effet naturel eſt de ramener la courbe vers ſon axe, entre dans la génération de ces ſortes de courbes qui, par leur nature, s'écartent de leur axe à l'infini. Il ſuppoſe un fait ſi extraordinaire, &

en même-tems ſi nouveau en Géometrie, comme une maniere d'axiome de la vérité duquel il ne feroit pas permis de douter. Delà paſſant à une autre hypothèſe, il donne pour effet de la force centrale, ſuppoſée ici très-gratuitement, les petites lignes appellées *Fléches*, compriſes entre la tangente & la courbe, ſans prouver davantage qu'en effet ces petites lignes ſont véritablement des effets de la force centrale ſuppoſée, & expriment les eſpaces que cette force feroit parcourir, dans le tems préciſément où le rayon vecteur décriroit un tel angle. Voilà donc deux hypothèſes qui ſont le fondement de la preſque totalité de ce que M. Newton a écrit ſur les forces centrales, & de toutes les formules algébriques qui en dérivent. Or que prouveroient ces formules, & tous les argumens de M. Newton, ſi les deux hypothèſes qui leur ſervent de

baſe étoient démontrées fauſſes ? Mais, dit-on, pourquoi ces formules donnent-elles dans tel cas une ellipſe, dans tel autre cas une parabole, une hyperbole, &c. La raiſon en eſt bien ſimple. On a d'abord ſuppoſé poſſible la génération de toute eſpèce de courbes, fermées ou non fermées, autour d'un point. On a ſuppoſé enſuite que, dans toutes ces courbes, les petites lignes compriſes entre la courbe & la tangente, étoient la meſure de la force centrale, pendant le tems de la deſcription d'un très-petit arc de la courbe. Or, partant delà, il eſt facile de trouver une formule générale qui exprime la force centrale de toutes les courbes poſſibles, & en ſubſtituant, dans cette formule, ce qui eſt propre à chaque courbe en particulier, il eſt clair que l'on obtiendroit, par cette ſubſtitution, tantôt une ellipſe, tantôt une parabole, une hyperbole. . . .

&c. ſans qu'on fût en droit d'en conclure qu'en effet la génération de toutes ces courbes, ainſi ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point fixe, fût poſſible. Ces réſultats ne prouveroient autre choſe, ſinon que dans le cas où le mouvement angulaire entreroit effectivement dans la génération d'une courbe non rentrante en elle-même, & que dans le cas encore où les petites lignes, compriſes entre la tangente & la courbe, ſeroient véritablement les effets de la force centrale, conſidérés pendant le tems de la génération d'un très-petit arc de cette courbe; cette courbe dans tel cas ſeroit un cercle, une ellipſe, & dans tel autre cas une parabole, une hyperbole. . . &c. décrites par leur foyer, ou par tel autre point qui ſeroit donné. Il reſteroit donc toujours à prouver qu'en effet le mouvement angulaire peut entrer dans la génération

des courbes non fermées, & que les petites lignes compriſes entre la tangente & la courbe, ſeroient en effet, dans ce cas, la meſure de la force centrale, ou les effets par leſquels cette force pourroit être repréſentée. Mais ſi M. Newton, ni depuis lui aucun Géomètre, n'a prouvé la vérité de ces deux propoſitions, comme il eſt évident, ne s'enſuit il pas qu'il n'y a rien de démontré dans tout ce qui a été écrit ſur les forces centrales, au ſujet de cette multitude de forces centripètes, par leſquelles on ſuppoſe que des courbes non rentrantes en elles-mêmes peuvent être décrites, & que les formules algébriques, & autres procédés mathématiques, dont on s'autoriſe pour en établir la réalité, ne prouvent rien, puiſqu'il reſte toujours à démontrer la vérité de deux propoſitions ſur leſquelles portent ces procédés & ces calculs, qui ne ſont établies que par

maniere de ſuppoſitions & de ſimples hypothèſes, & qui dès-là peuvent être fauſſes, & ne donner que des réſultats erronnés, dès que leur certitude n'eſt pas appuyée ſur une démonſtration rigoureuſe. Mais non-ſeulement la vérité de ces deux propoſitions n'eſt pas établie par la voie d'une démonſtration en forme, c'eſt qu'on démontre au contraire dans cet ouvrage de toutes les manieres poſſibles & les plus inconteſtables, qu'il eſt faux & abſurde que le mouvement angulaire, autour d'un ſeul & même point fixe, puiſſe jamais entrer dans la génération d'une courbe qui s'écarteroit à l'infini de ſon axe, telles que les courbes non rentrantes en elles-mêmes. Et en effet l'on doit ſentir que la propriété ſpéciale du mouvement angulaire étant de ramener la courbe vers ſon axe, il eſt abſurde de ſuppoſer que ce mouvement puiſſe entrer dans la généra-

tion des courbes qui, loin d'être ramenées vers leur axe, doivent, par leur nature, s'en écarter à l'infini. C'est-là une erreur intolérable en Géométrie, qui tend à confondre deux principes génératifs de courbure très-différents, & à détruire même l'un par l'autre; car en introduisant dans la génération d'une courbe qui, par sa nature, devroit s'écarter à l'infini de son axe, un principe contraire à sa nature, tel que celui du mouvement angulaire qui la rameneroit continuellement vers cet axe, il est évident que l'on détruit, en tout ou en partie, le mouvement essentiel à cette courbe, tendant à l'éloigner de ce même axe à l'infini, & que dès-là cette courbe, ainsi attaquée dans sa nature, ne peut plus subsister. Nommons *M*, le mouvement essentiel à une courbe quelconque non fermée, tendant à l'éloigner de son

axe, dans une ſuite de moments *t*; d'une quantité *R*, requiſe par la nature même de cette courbe. Cette courbe, par l'hypothèſe, ne pourroit donc ſubſiſter qu'autant que le mouvement qui devroit l'écarter de ſon axe ſeroit *M*, & que la quantité dont elle s'éloigneroit de ce même axe dans un tems *t*, ſeroit *R*. Or cela poſé, il eſt clair qu'en introduiſant dans la génération de cette même courbe un mouvement *N*, contraire au mouvement *M*, dont l'effet ſeroit de ramener la courbe vers ſon axe, dans le même tems *t*, d'une quantité *S*; il en réſulteroit que ſon mouvement eſſentiel *M*, ſeroit altéré & ne ſeroit plus que *M—N*, & que la quantité dont elle devroit s'écarter de ſon axe, dans un tems *t*, ne ſeroit plus *R*, mais *R—S*. Donc cette courbe ne ſubſiſteroit plus, puiſque ſon mouvement eſſentiel *M*, ſeroit détruit en tout ou en

partie, n'étant plus *M*, mais *M—N*, & que la quantité *R*, dont elle devroit, par ſa nature, s'éloigner de ſon axe dans un tems *t*, ne ſeroit plus *R*, mais *R—S*, cela eſt évident. Voilà, par exemple, la parabole de Galilée, décrite par un corps dont les tendances ſeroient toujours parallèles entr'elles, ou, ce qui reviendroit au même, qui ne coïncideroient que vers un centre infiniment diſtant du corps. Il y aura donc un mouvement *M*, eſſentiel à cette courbe pour l'éloigner de ſon axe, dans un tems *t*, d'une quantité *R*, d'où réſultera la proportionnalité entre les abſciſſes ou les eſpaces parcourus, & les quarrés des tems ou des ordonnées, en quoi conſiſte préciſément le mouvement parabolique. Mais voilà M. Newton qui ſurvient, qui veut rencherir ſur les principes de Galilée, & obtenir préciſément la même courbe, en introduiſant,

1°, dans ſa génération, le principe même de ſa deſtruction, c'eſt-à-dire, le mouvement angulaire dont l'effet ſeroit de ramener vers l'axe, une courbe qui, par ſa nature, doit s'en écarter à l'infini ; 2°, en accroiſſant infiniment la peſanteur du corps, & le faiſant circuler autour du premier foyer de la parabole, où ſa force centripète deviendroit finie, d'infiniment petite qu'elle étoit dans la parabole de Galilée, où le corps circuloit autour d'un centre infiniment éloigné. Altération eſſentielle dans la nature d'une courbe qui par-là ſe trouve néceſſairement transformée en une autre courbe ; car on ſait qu'une parabole ſe transforme en une ellipſe par la ſeule ſubſtitution d'un axe fini à un axe infini, que par conſéquent elle doit ſubir la même transformation, l'effet devant être le même, par la ſubſtitution d'une force centripète finie à une force centripète

infiniment petite. Que dire de ce moyen d'obtenir une courbe, en introduiſant dans ſa génération le principe même de ſa deſtruction, & celui de ſa transformation en une autre courbe ? Le mouvement angulaire eſt, par ſa nature, deſtructif de tout mouvement qui tendroit à écarter à l'infini une courbe de ſon axe. Donc ce mouvement ne peut être introduit dans la génération des courbes de cette eſpèce, & leur nature y réſiſte invinciblement.

L'Académie Royale des Sciences, à qui la plupart des Obſervations qui font l'objet de cet ouvrage, ont été communiquées, & ſur leſquelles ſon jugement a été pluſieurs fois requis, même par l'autorité ſupérieure à laquelle on a été obligé de s'adreſſer pour la faire parler, s'eſt toujours décidée à renvoyer au Public le jugement de ce point de controverſe, ſous prétexte *qu'elle ne devoit*

pas s'occuper d'objections contre des propoſitions qu'elle regardoit comme démontrées. Les commiſſaires qu'elle a été obligé de nommer, quand les ordres du Roi lui en ont été notifiés, ont fait un rapport tel quel, dont il ſera parlé dans l'ouvrage, ainſi que d'un premier rapport qui avoit déja été fait au ſujet de la meſure réelle de la force centrale du cercle, ſur laquelle les Géomètres s'étoient partagés, les uns ayant prétendu que cette meſure devoit être le quarré de l'arc décrit diviſé par le diamètre, & d'autres le quarré de l'arc décrit diviſé par le rayon, ce qui faiſoit une différence de moitié dans la meſure de cette force. L'Auteur des préſentes obſervations ayant démontré de pluſieurs manieres, que la véritable meſure de cette force étoit le quarré de l'arc décrit, diviſé par le diamètre & non par le rayon, l'Académie qui n'a point vu, dans cette

cette première queſtion, d'*objections contre des propoſitions qu'elle regardât comme démontrées* a daigné *s'en occuper*, & l'a décidée en faveur de l'Auteur, ſans néanmoins vouloir lui accorder qu'il y eût erreur dans les procédés de ceux des Géomètres qui donnoient une autre meſure à cette force. Le Public verra dans l'ouvrage, les raiſons pour & contre cette opinion qui lui paroîtra, ſans doute, d'abord aſſez étrange. La vérité s'établit de deux manieres, ou par des propoſitions directes qui la prouvent inconteſtablement, ou par la manifeſtation des erreurs, ou paralogiſmes dans leſquels tombent néceſſairement ceux qui la nient. Les Géomètres font également uſage de ces deux moyens de prouver une vérité mathématique, & on ne voit pas pourquoi l'Académie qui compte parmi ſes Membres un ſi grand nombre de Géomètres, même du pre-

mier ordre, s'eſt interdit pendant ſi long-tems en cette occaſion, l'uſage de ce ſecond moyen de défendre la vérité attaquée dans des propoſitions qu'elle *regarde comme démontrées.* On verra encore moins les motifs qui ont pû la porter à réduire à la qualité de ſimples *objections* des démonſtrations rigoureuſes, miſes ſous la forme la plus géométrique, & à élever au rang de *propoſitions démontrées*, de ſimples hypothèſes dont les mêmes démonſtrations prouvent toute l'abſurdité. Le Public, que l'Académie a deſiré que l'Auteur prît pour juge en cette occurrence, ne manquera pas de demander où peuvent ſe trouver *ces propoſitions démontrées*, dont l'Académie annonce l'exiſtence, ſans indiquer les Auteurs où on peut les voir, où il ſoit effectivement prouvé inconteſtablement que le mouvement angulaire peut entrer dans la génération d'une

courbe non fermée qui s'écarteroit à l'infini de ſon axe. Si, en feuilletant tous les ouvrages des Géomètres, à commencer par le fameux Livre des Principes de M. Newton, on ne trouve point cette propoſition, comme il eſt évident, par le fait, qu'elle n'exiſte nulle part, qu'elle ne ſoit autoriſée par aucune eſpèce de démonſtration bonne ou mauvaiſe, que penſera le Public de cette propoſition, abandonnée à toute la foibleſſe de la plus ſimple des hypothèſes, & de l'aſſertion de l'Académie qui l'éleve au rang de *propoſition démontrée.*

Dès qu'on veut que le mouvement angulaire, autour d'un ſeul & même point fixe, entre dans la génération d'une courbe non fermée, au moins faudroit-il faire entrer quelqu'arc de cercle, meſure de ce mouvement pendant le tems donné, dans l'expreſſion de la force centrale, par la-

quelle on ſuppoſe que cette courbe peut être décrite, comme il arrive dans le cercle, où l'arc décrit, meſure du mouvement angulaire, pendant un tems donné, entre dans l'expreſſion de la force centrale de cette courbe. Voilà la manière de prouver, même par le fait, qu'en effet le mouvement angulaire peut entrer dans la génération d'une courbe non fermée, c'eſt en introduiſant la meſure de ce mouvement dans l'expreſſion même de la force centrale ſuppoſée; car de ſe borner, comme on fait, à exprimer cette force par quelque fonction des tangentes, des abſciſſes, ou ſinus verſes, des fléches, des rayons oſculateurs, ou des rayons vecteurs, c'eſt évidemment manquer le but qu'on ſe propoſoit, puiſque, quelle que puiſſe être la manière dont une courbe non rentrante en elle-même ſeroit ſuppoſée décrite, ſoit autour d'un ſeul & même point

fixe, ſoit d'une autre manière, cette courbe n'en auroit pas moins ſes tangentes, ſes abſciſſes, ſes fléches, ſes rayons vecteurs, ou oſculateurs.... &c. Par conſéquent aucune fonction de ces lignes ne pourroit prouver ſa génération, autour d'un point fixe, & l'on doit ſentir la néceſſité d'y introduire quelqu'arc de cercle, décrit autour du centre de peſanteur du corps, lorſqu'on voudra que le mouvement angulaire entre dans ſa génération. C'eſt par-là que l'on connoîtra exactement quelles ſont les courbes qui peuvent être décrites autour d'un ſeul & même point fixe, & celles qui ne peuvent pas l'être, en même tems que l'on ſimplifiera infiniment la théorie des loix des forces centrales, dont on a fait une ſcience immenſe, en l'enviſageant dans ſa généralité, & qui ſe réduit, dans le fait, à un ſeul théorème, & à la génération de deux courbes poſſibles, au

cercle décrit par ſon centre, & à l'ellipſe décrite par l'un de ſes foyers, comme on le démontre clairement dans ces Obſervations, où l'on verra encore, non ſans ſurpriſe, combien on a peu entendu juſqu'ici la matière des forces centrales, de laquelle néanmoins nos Géomètres Newtoniens ſe croyent très-inſtruits. Les Auteurs qui paroiſſent avoir ſeuls écrit exactement ſur cette partie importante des mathématiques, ſont Galilée & Huyghens; tout ce qui eſt venu après, à commencer par M. Newton, dont les principes ont été aſſez généralement adoptés, paroît en général plus digne de cenſure que de louange, pour avoir obſcurci, par des ſubtilités, & des procédés peu exacts, les principes d'une ſcience fort ſimple en elle-même, dont ils ſont parvenus à faire une hydre, à force d'entaſſer hypothèſes ſur hypothèſes, ſubtilités ſur ſubtilités, & erreurs

ſur erreurs ; ce qui paroîtra encore manifeſte par les ſeuls paralogiſmes qui fourmillent dans le rapport des Commiſſaires de l'Académie, qui n'ont pû attaquer la vérité des quatre propoſitions, auxquelles cette controverſe a été réduite, ſans tomber eux-mèmes dans les erreurs, fauſſement imputées à ces mêmes propoſitions, ainſi qu'on le prouve clairement à la fin de cet Ouvrage, où on a renvoyé l'examen de ce rapport pour ne pas interrompre la chaîne des vérités, dont on a cru que cet examen devoit être précédé. De manière que les propoſitions controverſées ont le double avantage d'être prouvées, & par des démonſtrations directes qui en établiſſent clairement la vérité, & par les paralogiſmes dans leſquels on devoit néceſſairement tomber en attaquant leur certitude. En renvoyant ainſi à la fin de l'ouvrage les points controverſés,

on lui a conſervé la forme élémentaire, ſous laquelle il a été d'abord conçu, dans le deſſein de remplir les deſirs des Géomètres qui paroiſſent ſouhaiter depuis long-tems, un ouvrage purement élémentaire & propre à être mis entre les mains des Commençans, ſur cette partie importante des Mathématiques.



ÉLÉMENS

Nouvelle Démonſtration de la fauſſeté de tous les procédés des Géomètres-Newtoniens, dans la génération des Courbes ſuppoſées décrites par des Corps qui ſeroient mûs autour de leur centre de peſanteur.

On est obligé de mettre, à la fin de cet Ouvrage, une nouvelle démonſtration, qui a paru très-propre à être ſaiſie par le plus grand nombre des Lecteurs, contre les méthodes Newtonienes, dans la génération des courbes, ſuppoſées décrites autour d'un point, à cauſe que cette démonſtration n'eſt venue à l'eſprit de l'Auteur qu'au moment où ſon Ouvrage étoit tout imprimé, & qu'il n'étoit plus poſſible de la placer ailleurs. Voici en quoi elle conſiſte.

« Il eſt démontré, dans tous les Ouvrages qui traitent des forces centrales, » qu'un corps peſant *A* (*fig.* 31), qui » ſeroit pouſſé verticalement de bas en » haut, c'eſt-à-dire, dans une direction » *A M S*, perpendiculaire au centre *A*, de » peſanteur du corps, avec une vîteſſe » *V*, quelconque toute acquiſe, per- » droit, à chaque inſtant de la montée, » un degré de ſa vîteſſe, égal à celui

*

» qu'il acquerroit à chaque inſtant en
» deſcendant, juſqu'à ce que l'action de
» la peſanteur lui eût fait perdre, au der-
» nier inſtant de la montée, le dernier
» degré de la vîteſſe, après quoi il re-
» tomberoit librement par l'action de la
» peſanteur. Les eſpaces que les vîteſſes
» qu'il perdroit l'empêcheroient de par-
» courir, comptés depuis le commence-
» ment du mouvement, ſeroient en-
» tr'eux comme les quarrés des tems, &
» encore comme les quarrés des vîteſſes
» perdues.... &c.

Tel eſt le principe que nous venons de prendre mot à mot dans l'Analyſe démontrée, *Tom. II*, *pag.* 509 & 510, ſur les mouvemens retardés, & qu'on trouve dans une infinité d'autres Ouvrages. Si nous l'appliquons actuellement au mouvement des corps qui ſeroient ſuppoſés décrire une courbe quelconque, fermée, ou non fermée, autour de leur centre de peſanteur, on verra, avec la plus grande évidence, que tout ce qu'on a écrit ſur ces mouvemens eſt faux & erroné, puiſqu'il n'exiſte qu'une ſeule courbe, que ces corps peuvent décrire, qui eſt la ſpirale, comme il a été déja démontré.

En effet il eſt généralement accordé

que le centre de pesanteur du corps étant en *A*, & le corps poussé dans la direction verticale *A M S*, avec une vîtesse *V*, égale à celle qu'il auroit acquise, s'il étoit tombé de la hauteur, par exemple, *MA*, dans un tems *T*; il est, dis-je, généralement accordé que l'action de la gravité doit avoir détruit toute la vîtesse *V*, imprimée au mobile, dans le cours du même tems *T*, qu'il employeroit à monter de *A* en *M*, & par conséquent à parcourir, en montant, le même espace *A M*, qu'il auroit décrit en descendant.

Mais il est évident que le même effet doit toujours s'ensuivre, quelle que puisse être supposée la vîtesse finie *V*, qui seroit imprimée au corps, & dans quelque lieu que son centre de tendance fût supposé placé comme, par exemple, dans un point *F*, ou *Q*; puisqu'évidemment ce simple déplacement de lieu du centre de pesanteur, transporté de *A*, en *F*, ou *Q*, ne pourroit pas produire l'effet de rendre perpétuel un mouvement, par la courbe quelconque *A O N P*, que le corps décriroit alors, lequel seroit terminé au point *M*, quand le lieu du centre de pesanteur seroit en *A*. Ainsi la vîtesse quelconque *V*, imprimée au mobile, étant détruite dans un point *M*,

lorſque le centre de peſanteur du corps ſeroit en *A*, il eſt très-évident qu'elle ſeroit également détruite ſur un point *N*, de la courbe, lorſque ce centre ſeroit placé dans un point *F*, ou *Q*; puiſque la hauteur perpendiculaire, à laquelle le corps ſe ſeroit élevé au-deſſus de ſon centre de peſanteur, ſeroit $NF = MA$. Cette hauteur étant la même, ſoit que le centre de peſanteur du corps fût ſuppoſé en *A*, en *F*, ou en *Q*; le meme effet, s'enſuivroit toujours, c'eſt-à-dire, que l'action de la gravité auroit totalement détruit la vîteſſe *V*, imprimée au mobile, au moment où le corps, parvenu en un point *N*, de la courbe, ſe ſeroit élevé, au-deſſus de ſon centre de peſanteur, d'une quantité $NF = MA$; puiſqu'en effet il ſeroit égal que le corps, remontant de la même quantité au-deſſus de ſon centre de peſanteur, ſuivît la direction de la droite *AM*, ou de la courbe *ANP*. Cela eſt de la derniere évidence.

Si la courbe *ANP*, n'eſt point fermée; & s'écarte à l'infini du centre *F*, ou *Q*, de tendance, on voit combien il eſt abſurde de prétendre, d'après les ſavantes théories, des fléches, des ſinus-verſes, des rayons oſculateurs, des rayons de la développée, ſur-tout du fameux parallélogramme des

forces, & d'une peſanteur infiniment petite attribuée à des corps de dimenſions finies, &c, &c; on voit, dis-je, combien il eſt abſurde, malgré de ſi belles choſes, de prétendre, dans le cas d'une courbe non fermée, qu'une vîteſſe finie *V*, qui ſeroit totalement détruite, dans un point *N*, de la courbe, pût être éternelle ſur cette même courbe, & élever le corps à une hauteur infinie au-deſſus de ſon centre de peſanteur, tandis que l'on accorde en même tems, qu'en ſuppoſant le centre de peſanteur dans un point *A*, le corps ne pourroit remonter, avec cette même vîteſſe *V*, qu'à une hauteur *AM*, & que parvenu au point *M*, cette vîteſſe, qui auroit toujours décru, ſeroit totalement détruite.

Si la courbe *ANP*, eſt ſuppoſée un cercle, dès-lors *AM* eſt égale au demi-rayon, ou à l'eſpace que le corps auroit parcouru, en tombant, par le ſeul effet de ſa gravité, de la hauteur de ce demi-rayon. Ainſi le centre de peſanteur du corps étant ſuppoſé en *A*, & le corps ſuppoſé tomber de la hauteur *MA*, auroit acquis une vîteſſe *V*, avec laquelle ſeule il pourroit décrire le cercle, & qu'il perdroit, dans le même tems *T*, employé à l'acquerir, s'il étoit pouſſé verticalement de *A*, en *M*, au moment où il ſeroit parvenu au point *M*;

extrémité du demi-rayon *AM*. Mais il eſt évident, par ce qui vient d'être dit, que cette même vîteſſe *V*, ſeroit totalement détruite, dans un point *N*, de la circonférence *AON*, en tranſportant le centre de peſanteur du corps du point *A*, dans un point *Q*, centre du cercle; puiſqu'à ce point *N*, le corps ſe trouveroit élevé, au-deſſus de ſon centre de peſanteur, de la hauteur perpendiculaire *NF*, préciſément égale à la hauteur *AM*, où cette vîteſſe *V*, ſeroit détruite.

D'où il ſuit qu'un corps, non ſoutenu, ne pourra décrire ni courbes fermées, ni courbes non fermées autour de ſon centre de peſanteur, puiſque la vîteſſe *V*, qui lui auroit été imprimée, doit décroître de moment en moment, par l'action de ſa ſeule gravité, & finir par être entiérement détruite.

Donc le rayon vecteur, à l'extrémité duquel le mobile ſeroit ſuppoſé placé, décroîtroit en tems égal, par le décroiſſement du mouvement de projection.

Donc il s'anéantiroit. Donc le mobile ſeroit ramené au centre de tendance.

Donc la courbe qu'il décriroit, ne pourroit être qu'une ſpirale.

Donc enfin les corps du ſyſtême ſolaire ne peuvent faire leur révolution, autour

de leur centre de pesanteur, qu'en rou-lant, ou glissant sur des ellipses matériel-les, à la maniere qu'il a été expliqué.

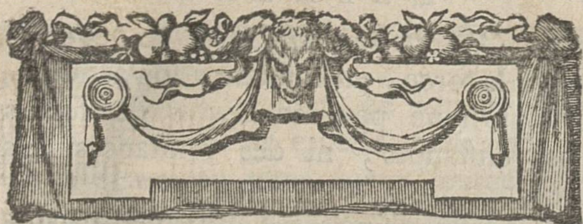
Dès qu'on a méconnu la véritable cour-be que des corps, non soutenus, peuvent décrire autour de leur centre de pesanteur, on doit juger à quel point les erreurs ont dû être multipliées, dans la théorie des forces centrales, pour avoir substitué tan-tôt une parabole, tantôt une ellipse, tantôt une hyperbole, tantôt un cercle.. &c. au mouvement spiral le seul possible, dans ce cas. On ne doit donc pas s'éton-ner de cette multitude de faux principes que l'on a été obligé d'attaquer dans la premiere Partie de cet Ouvrage.

Comme il sera éternellement vrai qu'une vîtesse quelconque finie V, imprimée à un corps dans un point A, & dans une di-rection verticale AM, seroit détruite dans un point M, lorsque le corps seroit re-monté au-dessus de son centre de pesan-teur, de la hauteur AM, dont il seroit descendu pour acquérir la vîtesse V; il sera éternellement vrai que cette même vîtesse seroit détruite, dans un point N, de la courbe quelconque AON, lorsque le corps seroit remonté à une hauteur $FN = AM$. Ce qui seul suffit pour démontrer la fausseté de toutes les méthodes Newto-

nienes, dans la génération des courbes fermées, ou non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un point. On voit qu'afin que cette vîteſſe pût être conſervée, il faudroit qu'elle fût infinie, parce qu'alors l'action de la gravité, qui eſt finie de ſa nature, ne produiroit qu'un effet fini ſur une force infinie, dès-là cet effet ſeroit nul à tout inſtant, & par conſéquent la vîteſſe du corps ſeroit conſervée; mais dans le cas d'une vîteſſe finie, il eſt clair que cette vîteſſe doit toujours finir par être détruite, par l'action finie de la gravité.

REMARQUE.

J'ai dit, page 131, qu'on ne trouvoit, *dans aucun Auteur connu*, la diſtinction des courbes rigoureuſes & des courbes polygones, relativement à l'expreſſion de la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle; mais, en reliſant le Traité de Dynamique de M. d'Alembert, je me ſuis apperçu que ce ſavant Géomètre avoit eu la même idée que M. Bézout, de qui M. Bézout l'a vraiſemblablement priſe. Au reſte je ne crois point cette idée plus exacte pour être du premier Géomètre de l'Europe, & de quelqu'un dont je révère même plus particuliérement la profondeur du génie, & l'univerſalité des connoiſſances.



ÉLÉMENS DES FORCES CENTRALES,

OU

Observations sur les Loix que suivent les Corps mûs autour de leur centre de pesanteur ;

Suivies d'un jugement de l'Académie Royale des Sciences sur plusieurs de ces Observations ; & d'un Examen critique de ce même jugement, à quoi on a joint un Théorême général & fondamental sur la mesure des Surfaces & des Solides, & quelques Observations sur la nature des Courbes quarrables & rectifiables.

DÉFINITIONS.

1. On appelle en général *Force*, tout principe moteur dont il résulte une action propre à mouvoir les corps.

2. *Obſtacle* ou *réſiſtance*, ce qui s'oppoſe à la force, en réſiſtant à ſon action.

3. On ne peut concevoir des forces ſans réſiſtances, ni des réſiſtances ſans forces.

4. L'effet d'une force ſera donc de vaincre un obſtacle, & l'effet de l'obſtacle de réſiſter à la force.

5. Si la force ſurmonte l'obſtacle du corps, ce corps ſera mû, ſi elle ne le ſurmonte pas, le corps perſiſtera dans ſon état de repos, & détruira la force.

6. D'où il ſuit que le mouvement d'un corps n'eſt autre choſe que l'effet de l'excès de la force qui lui ſera appliquée, ſur ſa réſiſtance.

7. L'obſtacle en réſiſtant à la force, détruit toujours dans elle la partie de la force qui ſeroit égale à la réſiſtance : enſorte qu'un obſtacle conſtant doit finir par détruire la force, à la fin d'un tems plus ou moins éloigné, à moins que l'obſtacle ne puiſſe être regardé comme nul, à l'égard de la force, ou, ce qui reviendroit au même, comme infiniment petit, & dès-lors il faudroit concevoir une force ſans réſiſtance, ce qui eſt impoſſible. Donc tout obſtacle ſera toujours en rapport fini avec la force, & finira toujours par la détruire,

ce qui démontre que le mouvement perpétuel eſt impoſſible.

8. La force ne peut, en rigueur, faire parcourir au corps qu'elle meut, des eſpaces égaux en tems égaux, parce qu'étant toujours diminuée par la perte que le corps qui lui réſiſte, lui fait éprouver, elle eſt toujours moindre, & par conſéquent elle ne peut faire parcourir au corps que des eſpaces qui lui étant proportionnels, ne peuvent que décroître en tems égal.

9. La réſiſtance que le corps oppoſe à la force eſt proportionnelle à la maſſe ou quantité de matiere, & ſuppoſe une tendance du corps vers un même point; car ſi ce corps ne tendoit pas vers un point, il ne réſiſteroit pas à l'action de la force, puiſqu'il eſt clair qu'un corps conçu ſans tendance ſeroit mû ſans oppoſer de réſiſtance à la force motrice. Cette tendance des corps vers un même point, eſt ce qu'on nomme peſanteur des corps. La peſanteur ſera donc proportionnelle à la maſſe ou quantité de matiere, contenue ſous le même volume.

10. Si une même force frappe différens corps, elle leur imprimera des vîteſſes qui ſeront en raiſon inverſe des quantités de matière renfermée dans ces corps; car dans

un corps qui auroit 2, 3, 4 . . . . . &c. fois plus de maſſe qu'un autre, la force étant diſtribuée ſur un plus grand nombre de parties, aura moins d'effet ſur chacune en particulier, & par conſéquent leur imprimera à proportion moins de vîteſſe. La vîteſſe du corps décroîtra donc à proportion que ſa maſſe augmentera. Elle ſera donc en raiſon inverſe des maſſes, c'eſt-à-dire comme $\frac{1}{m}$ à $\frac{1}{M}$, dans le cas où la maſſe m ſeroit ſuppoſée infiniment petite, par rapport à la maſſe M. Alors $\frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{M}{\infty}} = \frac{\infty}{M}$. Donc, dans ce cas, le rapport des vîteſſes, imprimées par la même force f, ſeroit comme $\frac{1}{M}$ à $\frac{\infty}{M}$, ou comme 1 à ∞. D'où l'on voit qu'en diminuant à l'infini la maſſe m, d'un corps, frappé par une même force finie f, ſa vîteſſe croît à l'infini.

11. La force abſolue, ou quantité de mouvement d'un corps, eſt toujours le produit MV, de la maſſe M par ſa vîteſſe V. Car ſi la maſſe eſt ſuppoſée $2\,M$, & la vîteſſe V l'action de la force ſur le corps eſt alors double, par la définition précédente; donc $2\,MV$ double de MV, ſera la quantité de mouvement, ou la force abſolue du corps.

Si la maſſe eſt *M*, & la vîteſſe 2 *V*, la force abſolue ſera encore 2 *MV*; puiſque la force employeroit autant d'action ſur une maſſe double 2 *M* pour lui communiquer une vîteſſe ſous-double *V*, qu'elle en employera ſur une maſſe ſous-double *M*, pour lui communiquer une vîteſſe double 2 *V*: & comme il en ſeroit toujours de même, quelque ſuppoſition que l'on fît, il s'enſuit que la force abſolue, ou quantité de mouvement d'un corps, qui eſt toujours en proportion de l'action de la force ſur le corps qu'elle meut, ſera le produit de la maſſe du corps par la vîteſſe.

12. On appelle *Mouvement rectiligne*, ou en ligne droite, celui que la force imprimeroit à un corps qui, étant conçu ſans peſanteur, ſeroit mû dans le vuide parfait, par l'effet d'une ſimple impulſion de la force : le corps ne perdant alors rien de l'action que la force lui auroit communiquée, décriroit en ligne droite des eſpaces égaux en tems égaux; & ſon mouvement étant toujours uniforme, ſeroit infini.

13. On appelle *Mouvement curviligne*, celui qui réſulte d'une ſimple impulſion en ligne droite, imprimée par la force, combinée avec la peſanteur du corps qui le fait tendre, dans tous les momens, vers un

même point. Il eſt évident que le corps mû de cette ſorte, ne peut décrire qu'une ligne courbe, puiſque, par l'effet de la peſanteur, il changeroit à tout inſtant de direction, & que deux points de la ligne qu'il décriroit, ne pourroient être dans la direction d'une même ligne droite; en quoi conſiſte préciſément la *curvité*, ſi l'on oſe ainſi exprimer l'état de courbure.

14. Il eſt important de ne pas confondre le mouvement avec la force: le mouvement réſulte d'une ou de pluſieurs impulſions que le corps auroit reçues tout à la fois & dans un inſtant indiviſible, & la force dérive d'une ſomme infinie d'impulſions ſucceſſives, reçues dans le cours d'un tems quelconque *T*. La peſanteur, qu'on nomme auſſi gravité, force centrale, force centripète, eſt une force & non un mouvement, parce qu'elle eſt néceſſairement l'effet d'une ſomme infinie d'impulſions centrales que tout corps reçoit dans la ſuite d'une infinité d'inſtans qui compoſeroient un tems quelconque *T* fini, ou infiniment petit. Delà il ſuit qu'il n'y a nul rapport aſſignable entre le mouvement & la force.

Ainſi le mouvement curviligne des corps eſt l'effet d'une ou de pluſieurs impulſions

reçues dans un inſtant indiviſible, d'où réſulteroit le mouvement rectiligne ſimple ou compoſé, modifié à tout inſtant, par une force dont l'effet eſt de transformer le mouvement rectiligne en curviligne.

15. La direction du mouvement du corps eſt toujours ſuivant la tangente à la courbe qu'il décrit; & la direction de la force, ou peſanteur, ſuivant un rayon, conſtant ou variable, c'eſt-à-dire ſuivant la ligne menée du corps à ſon centre de peſanteur. Car dès que la direction du mouvement du corps, change à tout inſtant, par l'effet de la force centrale, ce corps tend donc à décrire la tangente qui ſeroit menée à la courbe, au point où il ſe trouve, ce qui réduit le mouvement curviligne à un mouvement ſucceſſivement dirigé, par l'effet de la force centrale, vers toutes les tangentes qu'il eſt poſſible de mener à la courbe que le corps décrit.

La tendance du corps vers la tangente, ou l'effort qu'il fait à tout inſtant pour ſuivre cette direction, eſt appellée aſſez mal-à-propos, force par la tangente, force de projection. Ce n'eſt ici qu'un ſimple mouvement, communiqué au corps, par l'effet d'une ſeule impulſion reçue. Ainſi on doit en rigueur l'appeller mouvement ou

impulſion par la tangente, pour ne pas confondre la notion du mouvement avec celle de la force.

16. On appellé *Mouvement ſimple* celui qui réſulte d'une ſimple impulſion communiquée au corps dans un inſtant indiviſible.

17. On appelle *Mouvement compoſé* celui qui eſt l'effet de pluſieurs impulſions que le corps recevroit tout à la fois & dans un inſtant indiviſible, par l'action de pluſieurs forces, dont les directions formeroient un angle.

18. Deux forces ne peuvent agir ſur un corps qu'en deux manières. Ou leurs directions ſeront dans la même ligne, agiſſant ſoit du même côté, ſoit en ſens contraire. Ou elles formeront un angle, qui pourra être plus grand ou plus petit.

19. Si l'on nomme *A*, l'eſpace que l'une des deux forces feroit parcourir dans un tems *T*; *B*, celui que feroit parcourir l'autre force, dans le même tems *T*; *C*, l'eſpace que l'action combinée des deux forces feroit décrire dans ce même tems, il eſt évident que quand les directions des deux forces ſeront dans la même ligne, ſoit du même côté, ſoit en ſens contraire, l'eſpace parcouru par le corps ſera toujours $A \pm B$

$=C$. Dans le cas où $A=B$, l'eſpace parcouru ſeroit $=2A$, ou $2B=C$, (dans le cas où les forces agiroient du même côté); & dans celui où elles ſeroient en ſens contraire, l'eſpace parcouru ſeroit $A-B=0$ $=C$, parce qu'alors les deux forces ſe détruiroient l'une l'autre, étant égales & en ſens contraire.

20. Le plus grand eſpace que deux forces A & B puiſſent faire parcourir à un corps, ce ſera donc quand elles ſeront du même côté, puiſqu'alors l'eſpace parcouru ſeroit $A+B$; & le plus petit eſpace, quand elles ſeront en ſens contraire, puiſqu'alors l'eſpace ſeroit $A-B$ ou $B-A$. Cet eſpace ſeroit même nul dans le cas où $A=B$. Dans ce dernier cas, la perte que feroient enſemble les deux forces, eſt toujours égale au double de la force moindre; puiſque celle-ci étant détruite par la plus grande force, détruit néceſſairement dans cette derniere une portion de force égale à elle. Ainſi la ſomme des deux forces ſe trouve diminuée du double de la force moindre.

21. Quand les directions des forces formeront un angle, les forces ſeront en partie en ſens contraire, enſorte qu'il y aura une partie de leur ſomme qui ſera détruite

par le choc, le reste sera toujours exprimé par la diagonale du parallélogramme. Et c'est delà que dérive la loi qu'un corps mû par deux forces, dont les directions formeroient un angle, parcourra toujours la diagonale du parallélogramme des forces, dans un tems égal à celui que chaque force employeroit à lui faire parcourir séparément chacun des côtés : parce que quand les directions des forces forment un angle, la plus grande action que les forces *A* & *B* puissent imprimer au corps, est toujours moindre que leur somme $A+B$, & la plus petite action toujours plus grande que leur différence $A-B$ ou $B-A$: ce qui est évident, puisque dans le cas où l'angle des directions seroit supposé infiniment petit, le mobile marcheroit alors avec la somme $A+B$ des deux forces, qui, dans ce cas, agiroient du même côté. Ce cas est celui de la moindre perte : la diagonale devient alors égale à la somme des deux côtés du parallélogramme, & est par conséquent la plus grande possible.

Dans le cas, au contraire, où l'angle formé par les directions des forces, seroit supposé infiniment grand, ou de 180 degrés, les forces seroient en sens contraire, & le mobile ne seroit mû qu'avec une force

exprimée par *A* — *B* ou *B* — *A*. C'eſt ici le cas de la plus grande perte que pourroit faire la ſomme des deux forces, & de la plus petite diagonale décrite par le corps, puiſque la force *A* — *B* ou *B* — *A* ſe réduit même à zéro, dans le cas où *A* = *B*.

La propriété de la diagonale de tout parallélogramme fini ſera donc d'être toujours moins grande que la ſomme des deux côtés *A* + *B*, & toujours plus grande que leur différence *A* — *B* ou *B* — *A*. Donc le corps parcourra toujours, en vertu des deux forces, la diagonale du parallélogramme des forces, puiſque l'eſpace qu'il décrira, quel que puiſſe être l'angle que formeroit la direction des forces, plus grand ou plus petit, ſera toujours moindre que la ſomme *A* + *B*, des deux côtés, & plus grand que leur différence *A* — *B* ou *B* — *A*.

22. Il ſuit delà que les forces ſeront d'autant plus en ſens contraire, que l'angle formé par leur direction ſera plus grand, & dès-là la portion de ces forces détruites par leur choc, ſera plus conſidérable, & que la diagonale du parallélogramme des forces exprime toujours très-exactement la partie qui reſte de la ſomme de ces forces, après leur choc. Et la différence de la

ſomme des deux côtés, avec cette même diagonale, exprimera par conſéquent la partie de la ſomme de ces forces qui aura été détruite par le choc de forces qui étoient en partie en ſens contraire.

23. Une même force ne peut agir ſur un corps, qu'en deux manières. Ou cette force ſera appliquée au corps ſeulement pendant un inſtant indiviſible, ou elle lui ſera continuellement appliquée. Dans le premier cas, l'effet de la force ſera de faire parcourir au corps des eſpaces proportionnels aux tems durant leſquels ils auroient été parcourus, ou, ce qui eſt le même, de lui imprimer un mouvement uniforme. Dans le ſecond, la vîteſſe du corps croîtra, en tems égal, puiſque la force, en ſuivant le corps, lui imprimeroit à chaque inſtant de nouveaux degrés de vîteſſe, & les vîteſſes acquiſes étant proportionnelles au tems que le corps eût employé à les acquérir : il s'enſuit que les eſpaces parcourus ſeroient proportionnels aux quarrés des tems ou des vîteſſes, comme il réſulte de la propoſition ſuivante.

24. Le plus grand effet qu'une force quelconque *F*, puiſſe produire ſur un corps, c'eſt évidemment de lui faire parcourir des eſpaces proportionnels aux quarrés des

tems, puiſque ces eſpaces ſont ceux mêmes qu'elle feroit décrire dans le cas où elle ſeroit continuellement appliquée au corps, & qu'elle ne peut produire ſur le corps un plus grand effet que celui qui réſulteroit de ſon action continue.

25. Delà il ſuit qu'une force quelconque ne peut être ſuppoſée faire parcourir à un même corps des eſpaces proportionnels, par exemple, au cube, à la quatrième, cinquième...&c. puiſſance du tems dans lequel ils auroient été décrits; puiſque l'effet produit ſeroit alors ſupérieur à la force, ce qui implique.

26. Une même force appliquée à un corps ne peut que déployer ſur ce corps, à tout inſtant, la totalité de ſon action, ce qui eſt évident. Donc il ſeroit abſurde de ſuppoſer une force qui, étant appliquée à un même corps, lui imprimeroit tantôt plus, tantôt moins d'action en tems égal, puiſqu'il faudroit concevoir alors qu'une partie de l'action de la force ne ſeroit pas communiquée au corps, ce qui ne peut être.

27. Donc l'hypothèſe de M. Newton d'une force attractive, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance des corps à leur centre de peſanteur, eſt fauſſe, & ne peut être

vraie ; puiſqu'il en réſulteroit que la force attractive ne déployeroit pas, à tout inſtant, la totalité de ſon action ſur un même corps ; mais graduellement & ſuivant que le corps ſeroit plus près ou plus loin de ſon centre de tendance.

Nommons *p*, la totalité de l'action de la force attractive ; *D*, la diſtance du corps à ſon centre de peſanteur. La portion d'action communiquée au corps, par cette force, ſeroit, ſuivant M. Newton, en raiſon de $\frac{1}{D^2}$, & par conſéquent l'eſpace que le corps parcourroit à cette diſtance en raiſon de $\frac{1}{D^2}$; à la moitié de cette diſtance *D*, c'eſt-à-dire, à l'intervalle $\frac{D}{2}$, la portion d'action que la force attractive communiqueroit au corps, ſeroit, toujours ſuivant M. Newton, en raiſon de $\frac{1}{\overline{\frac{D}{2}}^{2}} = \frac{1}{\frac{D^2}{4}} = \frac{4}{D^2}$, c'eſt-à-dire, qu'elle ſeroit quadruple de la portion d'action $\frac{1}{D^2}$, communiquée à une diſtance double, & par conſéquent l'eſpace que le même corps parcourroit à cet intervalle ſeroit, en tems égal, en raiſon de $\frac{4}{D^2}$. Or il eſt abſurde de ſuppoſer qu'une

force attractive p, toujours appliquée à un corps M, ne déploye sur ce corps que la portion d'action $\frac{1}{D^2}$, $\frac{4}{D^2}$, $\frac{16}{D^2}$ ..... &c. au lieu de déployer sur lui, à tout instant, la totalité de son action p; car les actions $\frac{1}{D^2}$, $\frac{4}{D^2}$, $\frac{16}{D^2}$ ... &c. ne sont que des parties de l'action totale p. On suppose ici avec tout le monde, & avec M. Newton lui-même, que les forces motrices sont des causes aveugles, physiques, privées d'intelligence, comme toutes les forces physiques que nous connoissons, & qui étant nécessitées de déployer sur les corps qu'elles meuvent la totalité de leur action, ne peuvent par conséquent jamais être supposées communiquer en tems égal, plus ou moins d'action sur eux, quelle que puisse être la distance de ces corps à leur centre de pesanteur.

28. La mesure légitime de la force, c'est l'espace qu'elle fera parcourir dans un tems déterminé; car les forces motrices ne peuvent être connues que par les effets qu'elles produisent sur les corps; & ces effets étant les espaces décrits par les corps, dans tel tems T, déterminé, il s'ensuit que ce sera par ces effets qu'il faudra mesurer

la force & les eſpaces par le tems T, qui ſera employé à les décrire.

29. Il ſuit de la dernière définition une nouvelle démonſtration contre l'hypothèſe de M. Newton, de forces attractives en raiſon inverſe du quarré des diſtances, puiſque, ſuivant cette hypothèſe, les eſpaces parcourus ne ſeroient plus meſurés par le tems T, qui auroit été employé à les parcourir, mais par la force attractive $\frac{1}{D^2}$; car il eſt évident qu'en tems égal, les eſpaces décrits croîtroient, dans ce ſyſtème, comme l'action de la force attractive augmenteroit, & par conſéquent ces eſpaces ne ſeroient plus proportionnels aux quarrés des tems employés à les décrire, contre ce qui eſt démontré dans tous les Livres qui traitent des Forces centrales. Car les eſpaces ne ſont proportionnels aux quarrés des tems, que quand la force p, déploye à tout inſtant, la totalité de ſon action ſur le corps. La force qui frappe le corps eſt alors conſtante, puiſque c'eſt toujours la force p; mais dans l'hypothèſe où la force p, déployeroit ſur le corps tantôt plus, tantôt moins d'action, il eſt évident que les eſpaces parcourus ne ſeront plus proportionnels aux quarrés des tems, & que dès-là

dès-là cette loi géométrique ſeroit renverſée par l'hypothèſe d'une attraction en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Donc cette hypothèſe eſt abſolument fauſſe & controuvée, puiſqu'elle eſt contraire à la loi des eſpaces proportionnels aux quarrés des tems, qui eſt une loi géométrique.

30. J'appelle proprement *peſanteur*, *gravité*, *force centripète*, *force centrale*, cette force qui eſt imprimée à tous les corps dont l'effet eſt de les faire tendre à tout inſtant vers leur centre de peſanteur, en raiſon du produit de leur maſſe, ou quantité de matière, par la vîteſſe initiale, ou premiere impulſion centrale que la force motrice leur imprime dans le premier inſtant indiviſible & avant toute eſpece de vîteſſe acquiſe; enſorte que le corps étant ſuppoſé mû par cette ſeule & premiere impulſion centrale, ſans recevoir de nouvelles impulſions de la force motrice, ni de nouvelles vîteſſes, pût parcourir uniformément vers ſon centre de peſanteur un certain eſpace *E*, dans un certain tems *T*. Telle eſt l'idée préciſe que l'on doit ſe former de la peſanteur proprement dite, c'eſt-à-dire, l'idée d'une force centrale, uniforme & conſtante, qui en tems égaux feroit parcourir des eſpaces égaux.

31. J'appellerai *Force centrale accélératrice*, ou *accélérée*... &c. l'effet de l'action continue de la force sur le corps, par lequel il parcourra toujours des espaces proportionnels aux quarrés des tems.

Ainsi, autre est la force de la gravité, de la pesanteur, de la force centrale, ou centripète uniforme qui feroit parcourir aux corps des espaces proportionnels aux tems, & autre la force centrale accélératrice qui leur feroit décrire des espaces proportionnels aux quarrés de ces mêmes tems.

On a confondu jusqu'ici ces deux forces, ou pour mieux dire, on a appellé très-mal-à-propos pesanteur, gravité, force centrale, force centripète, les effets de la force centrale accélératrice. Les petites lignes comprises entre la tangente & la courbe, appellées fléches, sont les espaces que l'on suppose que la pesanteur, ou force centripète, feroit parcourir dans un tems infiniment court, & l'on n'a pas fait attention que ces espaces, quelque petits qu'on puisse les supposer, ne peuvent jamais être que les effets de la force centrale accélératrice, considérée pendant un très-petit instant *t*, & par conséquent qu'on ne doit point les attribuer à la pesanteur proprement dite, qui en soi est une force uniforme.

32. Si la force accélératrice fait parcourir un espace E, dans un tems t fini, ou infiniment petit, la force de la gravité, ou la pesanteur ne feroit parcourir au même corps, pendant le même tems t, qu'un espace = à $\sqrt{E}$; ce qui est évident, puisque l'espace E étant en raison de t^2, l'espace $\sqrt{E}$, sera en raison de $\sqrt{t^2} = t$.

33. D'où il suit que la pesanteur, ou force centrale, force de la gravité, force centripète constante, ne feroit jamais parcourir à un corps, d'un mouvement uniforme, que la racine quarrée $\sqrt{E}$, d'un espace quelconque E ; que la même force, devenue accélératrice, lui feroit décrire dans le même tems t, d'un mouvement uniformément accéléré.

Et de-là il suit encore qu'on ne pourra déterminer l'expression d'un espace quelconque, que la force centripète d'un corps qui feroit supposé décrire une courbe, autour de son centre de pesanteur, lui feroit parcourir dans un tems t, que par l'espace que la force accélératrice lui feroit décrire dans le même tems, puisque le premier espace est toujours la racine quarrée du second.

34. Dans le cas où l'on voudroit établir une hypothèse physique sur le phénomène

de la gravité, en considérant que la pesanteur ou tendance est toujours dirigée vers un centre particulier de rotation, tel que le soleil ou les planètes centrales qui tournent autour de leur axe, & qui sont le centre de pesanteur des corps qui circulent autour d'eux, on pourroit, peut-être, regarder la pesanteur, comme l'effet d'une réaction nécessaire contre le centre de tendance & de rotation, qui tend à éloigner de lui, par sa force centrifuge, les différens corps placés dans sa sphere d'activité; car dès qu'il y a des centres de rotation, ce qui est incontestable, il y aura donc une force répulsive qui écartera de ces centres, & nécessairement une réaction contre ces mêmes centres, d'où procédera la pesanteur, ou tendance des corps vers les différens centres de rotation. Cette pesanteur étant toujours le produit de la masse des corps par la vîtesse avec laquelle la réaction les repousseroit vers le centre de pesanteur : car l'action d'un centre de rotation étant centrifuge de sa nature, un corps ne pourroit évidemment tourner un certain tems sur lui-même, sans écarter indéfiniment les différens corps placés dans sa sphere d'activité, & par conséquent sans finir par s'épuiser lui-même. Il faut donc

concevoir une réaction, contre tout centre de rotation, dont l'effet sera de ramener vers ce centre les différens corps que la force centrifuge tendroit à en écarter à l'infini, & c'est cette force qui pourra être regardée comme le principe immédiat de la pesanteur, on de la tendance des corps vers les différens centres de rotation du systême planétaire. Qu'un certain nombre de corps soient supposés placés entre le centre & la circonférence de la sphere d'activité d'un corps circulant sur lui-même, supposant une réaction de toutes les parties de cette circonférence contre le centre de rotation, il est clair que cette réaction seroit le principe de la pesanteur, ou de la tendance de ces différens corps au centre commun de rotation, puisque l'action de la circonférence pousseroit tout vers ce centre, & cette action étant continue sur un même corps, ce corps ne pourroit que parcourir vers le centre de tendance & de rotation des espaces proportionnels aux quarrés des tems employés à les parcourir.



PREMIERE OBSERVATION.

Sur la nature des forces centrales & sur leur mesure.

QUAND on examine avec attention & avec un esprit d'impartialité les différentes idées de M. Newton sur les loix des forces centrales, on n'est pas long-tems à se convaincre que ces idées ne peuvent être que celles d'un très-mauvais Philosophe, mises en œuvre par un grand Géomètre. C'est à quoi M. Newton, un peu approfondi, sera toujours réduit. Les idées de cet homme célèbre sur les forces centrales, sont qu'un même centre exerce différens degrés d'action, tantôt sur un même corps, tantôt sur différens corps, suivant leurs différens degrés de proximité de ce centre. Quand le corps est plus près du centre, l'action du centre sur le corps augmente; quand il est plus loin, cette action diminue, ensorte que ce centre déploie tantôt plus, tantôt moins d'action sur le corps en tems égal.

Or cette idée d'un même centre qui déploie en tems égal, tantôt plus, tantôt

moins d'action ſur les corps, eſt philoſophiquement & métaphyſiquement fauſſe. Elle ne peut donc être géométriquement vraie; car pour concevoir bien clairement l'action d'une force ſur un corps, on ne peut rien faire de mieux que de ſuppoſer que la force ſeroit immédiatement appliquée ſur le corps. Soit donc une force quelconque *F*, (*fig.* 1.) ſuppoſée appliquée ſur un corps *A*. Il eſt d'abord clair que cette force ne peut être que conſtante de ſa nature, puiſqu'elle ne pourroit avoir, par elle-même, qu'une action *m*, conſtante à tranſmettre au corps *A*, & qu'en vertu de cette tranſmiſſion d'action, le corps parcourroit, dans un tems *t*, un eſpace *E*, plus grand ou plus petit. Si la force abandonne le corps dans ſon trajet de *A* en *C*, & immédiatement après lui avoir tranſmis ſon action *m*, alors le corps ne recevant qu'une ſimple impulſion de la force, ſeroit mû uniformément, & parcourroit à l'infini des eſpaces égaux en tems égaux. Ces eſpaces ſeroient donc proportionnels aux tems employés à les parcourir, d'où ſuivroit cette analogie entre les tems, les vîteſſes & les eſpaces parcourus; $t : T :: v : V :: e : E$. Et comme les eſpaces parcourus ſont toujours un produit du tems par la vîteſſe, on auroit ces

égalités : $tv = e$, $TV = E$. D'où on tireroit $t = \frac{e}{v}$, $v = \frac{e}{t}$. $T = \frac{E}{V}$. $V = \frac{E}{T}$. C'est-à-dire que les tems t, T, feroient égaux aux espaces e, E, divisés par les vîtesses, ou les vîtesses v, V, égales aux espaces e, E, divisés par les tems. Mais l'action que la force auroit communiquée au corps, étant d'autant plus grande que l'espace e, E, qu'elle lui feroit parcourir, seroit plus grand, & le tems t, T, employé à le parcourir, plus petit, il s'ensuit que cette force seroit directement comme l'espace parcouru, & inversement comme le tems, c'est-à-dire, en raison de $\frac{e}{t} = v$, $\frac{E}{T} = V$, c'est-à-dire en raison directe des vîtesses. La mesure de cette force seroit donc le produit de la vîtesse par le tems, puisque l'effet de la force, par lequel elle doit toujours être représentée, seroit d'imprimer au corps une certaine vîtesse v, V, en vertu de laquelle les corps, à la fin d'un tems t, T, auroient parcouru un espace e, E. Dans le cas où on voudroit exprimer la force par la vîtesse v, V, on doit alors supposer le tems t, T, égal à l'unité, afin que v, V, exprime toujours un espace e, E, qui dans ce cas seroit le produit d'un tems $t = 1$ par la vîtesse v;

car la vîtesse ne peut faire connoître la force qu'autant qu'elle seroit considérée dans un tems, & l'espace parcouru ne pourroit non plus la manifester qu'autant que le tems durant lequel il auroit été décrit seroit connu. D'où il suit que la seule mesure de la force est la vîtesse multipliée par le tems.

Dans le cas où la force F, suivroit le corps, & lui seroit perpétuellement appliquée, qui est le plus grand effet qu'elle pourroit produire sur lui, il est évident qu'elle lui imprimeroit dans le cours d'un tems t, une somme d'action $S\,m$, d'où résulteroit un accroissement de vîtesse en tems égal ; car cette vîtesse augmenteroit à proportion que le nombre des tems t, durant chacun desquels la force auroit imprimé au corps la somme égale d'action $S\,m$, seroit plus grand. A la fin du premier tems t, la somme d'action ou d'impulsions imprimées seroit $S\,m$; à la fin du deuxieme tems t, $2\,S\,m$, & successivement $3\,S\,m$, $4\,S\,m$, $5\,S\,m$, $6\,S\,m$.... &c. à la fin de chaque tems suivant t. Donc la vîtesse du corps croîtroit comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 ..... &c. Ces vîtesses pourroient donc être exprimées par les élémens BC, DE, FG.... &c. d'un triangle

AHP (*fig.* 2), & feroient acquifes dans une fuite de tems égaux *AB*, *BD*, *DF*, &c. D'où il fuivroit, 1°, que les vîteffes acquifes *BC*, *DE*... &c. feroient comme les tems *AB*, *AD*... &c. employés à les acquérir; 2°, que les efpaces parcourus, ou le produit du tems *AB*, *AD*, *AF*.... &c. par les vîteffes acquifes *BC*, *DE*, *FG*... &c. à la fin de ces mêmes tems, feroient repréfentés par les triangles *ABC*, *ADE*, *AFG*.... &c. & en conféquence que ces efpaces feroient égaux à la moitié du produit du tems par la vîteffe acquife, c'eft-à-dire à $\frac{vt}{2} = ABC$, ou $= ADE$.... &c. 3°, Que l'efpace *ABCO*, décrit uniformément avec la vîteffe *BC*, acquife à la fin du tems *AB*, & pendant ce même tems, feroit toujours le double de l'efpace *ABC*, décrit d'un mouvement uniformément accéléré pendant le même tems *AB*, c'eft-à-dire que vt feroit toujours double de $\frac{vt}{2}$; ce qui eft évident; 4°, Que $\frac{vt}{2}$ pouvoit être confidéré comme un efpace décrit uniformément avec la moitié de la vîteffe $\frac{v}{2}$, acquife à la fin du tems t, & pendant ce même tems, ce qui fourniffoit un moyen

de confidérer un efpace $\frac{vt}{2}$ décrit d'un mouvement uniformément accéléré, comme décrit uniformément avec une vîteffe $\frac{v}{2}$, & pendant le même tems t; 5°, Que dans une fuite d'inftans égaux AB, BD, DF.....&c. les efpaces décrits ABC, $BCDE$, $DEFG$... &c. étoient entr'eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7.... &c; 6°, Que les efpaces parcourus ABC, ADE.... &c. depuis le commencement du mouvement, étoient entr'eux comme les quarrés des tems AB, AD.... &c. ou commme les quarrés des vîteffes BC, DE.... &c. acquifes à la fin de ces tems. D'où fuivoient ces analogies :

$t : T :: v : V. \frac{tv}{2} : \frac{TV}{2} :: t^2 : T^2 : v^2 : V^2 :: e : E.$

Que la force accélératrice f, étoit toujours directement comme l'efpace e parcouru, & inverfement comme le quarré t^2 du tems employé à l'acquérir, c'eft-à-dire en raifon de $\frac{e}{t^2} = \frac{tv}{2t^2} = \frac{v}{2t}$, & dans le cas où le tems $t = 1$, cette force étoit en raifon de $\frac{v}{2}$, c'eft-à-dire, en raifon de la moitié de la vîteffe $\frac{v}{2}$, acquife à la fin du tems

$t=1$, ou comme l'espace e, parcouru, ou la moitié du produit de la vîtesse acquise par le tems employé à l'acquérir ; ensorte que cette force n'étoit jamais que la moitié de la force qui faisoit décrire au même corps l'espace vt, double de $\frac{vt}{2}$, avec la vîtesse v, acquise à la fin du tems t, & pendant le même tems, durant lequel le corps auroit parcouru d'un mouvement uniformément accéléré l'espace $\frac{vt}{2}$; cette force étant toujours en raison de $\frac{e}{t^2}$, $\frac{E}{T^2}$, on aura : $f=\frac{e}{t^2}=\frac{E}{T^2}=\frac{vt}{2t^2}=\frac{v}{2t}=\frac{VT}{2T^2}=\frac{V}{2T}$.

Telles sont les loix qui résultent de l'action d'une même force F, sur un corps A. Ou cette force agira sur le corps seulement pendant un instant indivisible, ou elle lui sera perpétuellement appliquée, voilà toutes les manieres dont la force pourra agir sur les corps, & que l'on puisse concevoir. Dans le premier cas, les espaces parcourus seront proportionnels aux tems, & dans le second, ils seront proportionnels aux quarrés des mêmes tems, ou des vîtesses acquises ; & comme c'est là le plus grand effet qu'une même force F, puisse produire sur un corps, puisqu'on ne

peut pas concevoir qu'une force puiſſe produire un plus grand effet que celui qui réſulteroit de ſon action continue ſur un même corps : il s'enſuit qu'il eſt philoſophiquement & métaphyſiquement faux qu'une même force *F*, puiſſe produire ſur un même corps *A*, les effets que M. Newton lui attribue, de l'attirer en raiſon inverſe du quarré, du cube . . . &c. de la diſtance au lieu où réſideroit la force ; car dès-lors la force, en ne ceſſant d'être appliquée ſur le corps, déployeroit ſur lui en tems égal, tantôt plus, tantôt moins d'action ; il faudroit donc concevoir qu'au point *A*, par exemple, plus loin du centre *C*, où ſon mouvement ſeroit dirigé, elle n'auroit pas autant d'action qu'au point *D*, plus près du centre *C* ; puiſqu'en effet, par la ſuppoſition, ſon action ſeroit moindre, en tems égal, en *A*, qu'elle ne le ſeroit en *D*. Or on demande qui donneroit en *D*, à la force *F*, la portion *n*, d'action qu'elle déployeroit de plus ſur le corps, qu'au point *A* ? ou dans le cas où elle auroit par elle-même ce ſurplus *n* d'action, qui l'empêcheroit de le déployer ſur le corps au point *A*, & comment elle pourroit le tenir en réſerve, lui étant continuellement appliquée pour attendre qu'il fût parvenu préciſé-

ment au point *D*, pour le lui communiquer ?

Mais comme il n'eſt pas poſſible de concevoir dans une force, la propriété d'accroître, de ſoi, ſa propre action, & de ſe rendre plus grande qu'elle n'étoit ; ou de lui ſuppoſer la faculté de retenir par devers elle une partie de cette même action pour en tranſmettre, en tems égal, tantôt plus, tantôt moins au corps auquel elle ſeroit appliquée, & que de telles propriétés ne peuvent jamais être attribuées à aucune force de l'eſpece de celles dont il s'agit ici. Il s'enſuit que ces forces de M. Newton, dont l'action ſur un même corps varieroit en tems égal, en raiſon de quelque fonction de la diſtance de ces corps au centre de tendance, ne peuvent être que fauſſes & abſurdes, quoique la loi d'une tendance au centre, en raiſon de cette même fonction de la diſtance, pût être vraie. Par exemple, il pourroit être vrai que la tendance des corps planétaires au ſoleil fût en raiſon inverſe du quarré de leur diſtance à cet aſtre ; mais il ne peut jamais être vrai qu'une ſeule & même force, agiſſant ſur ces corps, ſoit par attraction, ſoit par impulſion, puiſſe produire, en tems égal, cette inégalité d'action qui réſulte de cette

loi, parce qu'une même force *F*, ne peut être conçue qu'avec une action constante *m*, qui la constituera ce qu'elle est, & qui ne pourra produire sur un même corps que les deux effets dont il vient d'être parlé. Lui faire parcourir des espaces proportionnels aux tems dans le cas d'une seule impulsion communiquée au mobile, dans un instant indivisible, ou des espaces proportionnels aux quarrés des tems dans le cas où elle lui seroit continuellement appliquée. Il est évident qu'un plus grand effet ne sauroit être attribué à cette force, puisqu'une force ne peut pas produire un effet plus grand qu'elle, ni qui puisse surpasser celui qui résulteroit de son action perpétuelle sur un même corps. S'il arrive donc que les loix du mouvement, considérées dans différens corps, circulant autour du même centre, établissent le fait d'une tendance en raison inverse du quarré des distances; c'est alors une nécessité de recourir à l'action de quelques corps, qui pourroit avoir la propriété de produire cet effet; comme seroit, par exemple, un fluide élastique qui ayant d'autant plus de force, dans ses différentes parties, qu'elles seroient plus près du centre de tendance, imprimeroit différens degrés de vîtesse cen-

trale aux corps que ce fluide rencontreroit, en poussant de la circonférence au centre, suivant que ces corps recevroient l'impression des parties plus fortes ou plus foibles de ce fluide : dès-lors l'effet de la tendance, en raison inverse du quarré des distances, n'est point attribué à une seule force, mais à une infinité de forces, distribuées dans les différentes parties d'un fluïde moteur, & c'est d'un tel principe que doit partir la loi d'une tendance en raison de quelque fonction des distances au centre commun de pesanteur.

Il ne suffit donc pas d'être Géomètre, & de calculer les effets d'une force à laquelle il aura plû d'attribuer telles ou telles propriétés ; il faut encore être Philosophe pour n'attribuer aux forces que les propriétés qui peuvent leur convenir. Si le Géomètre doit mettre en calcul les idées du Philosophe, l'esprit de philosophie doit diriger les idées du Géomètre, & l'empêcher de s'égarer dans des suppositions contraires à la nature des choses. Il peut être fort commode au Géomètre de n'avoir qu'à supposer une même force en raison de quelques fonctions des distances des corps à leur centre de pesanteur, pour n'avoir plus qu'à calculer certains effets qui seront attribués

à

à cette force ; mais si cette force seule ne peut pas produire ces effets, s'il est nécessaire que plusieurs forces concourent pour les engendrer, en attribuant alors à une seule force les effets qui résulteroient de l'action de plusieurs, on tombe nécessairement dans l'absurde, en même tems que l'on couvre d'un voile impénétrable les ressorts secrets qu'employe la nature dans la motion des corps.

SECONDE OBSERVATION.

Sur la nature du mouvement curviligne & sur la maniere de le concevoir.

PLUSIEURS Géometres, même d'après M. Newton, considérant les courbes qui seroient décrites autour d'un seul & même point fixe, centre de pesanteur du corps, comme poligones d'une infinité de côtés rectilignes infiniment petits, se servent de la méthode du parallélogramme des forces, pour engendrer ces courbes : ils supposent que le corps en *A* (*fig.* 3.) est mû dans un tems infiniment court, par l'effet de deux impulsions, l'une *AB*, dans la direction de la tangente *AR*; l'autre *AD*, dans la direc-

tion du rayon *AC*; d'où par ces forces combinées, le corps parcourroit la diagonale, ou arc *AO*, du parallélogramme *ABOD*, dans le même tems qu'il eût employé à parcourir séparément chacun des côtés *AB*, *AD*, de ce parallélogramme; & faisant le même raisonnement à tous les angles *o*, *g*... &c. du poligone infini-latéral, ils en déduisent la génération de la courbe *A o g A*.

Cette génération du poligone infinitaire n'est nullement exacte; car que ce poligone soit supposé un cercle, il est démontré que vers l'origine *A*, la tangente *AB* est infiniment grande à l'égard de l'abscisse ou sinus-verse *AD*. Plusieurs Géomètres se servent même de ce rapport infini, pour prouver que la force centrale *AD* ne peut rien faire perdre au mouvement de projection *AB*, attendu, disent-ils, que la force représentée par *AD*, est infiniment petite à l'égard de la force représentée par *AB*, & qu'elle ne peut, tout au plus, que lui faire perdre une force infiniment petite du second ordre, dans un tems *t*, infiniment petit; ensorte que la somme de toutes ses pertes dans un tems *t*, fini, ne seroit qu'un infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire zéro.

On ne peut rien de plus abſurde que ces différentes idées ; car certainement la force centrale, & la force de projection d'un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire un cercle autour de ſon centre *C*, ſont de ſoi en rapport fini, & par conſéquent ne peuvent être exprimées par les lignes *AB*, *AD*, dont l'une eſt infiniment grande par rapport à l'autre ; & en effet nous démontrerons par la ſuite que la force de projection d'un corps qui décriroit un cercle, eſt toujours telle qu'elle lui feroit parcourir uniformément un arc, ou eſpace égal au rayon *AC* du cercle décrit, tandis que la force accélératrice lui feroit parcourir dans le même tems la moitié de ce même eſpace. Cette force accélératrice, par la premiere obſervation, ſeroit donc égale à une force uniforme qui feroit parcourir au corps, dans le même tems, le même eſpace, qui eſt ici le demi-rayon du cercle décrit. Donc la force de projection ſeroit à la force accélératrice, conſidérée dans le même tems *t*, qu'employeroit le corps, à décrire uniformément un arc *AM*, égal au rayon *AC*, comme 2 eſt à 1. Mais cette force conſidérée dans un même cercle décrit, eſt toujours la même force, par la premiere obſervation, quelque puiſſe être ſuppoſé l'arc

décrit *AM*, plus grand ou plus petit, puisque $f = \frac{e}{t^2} = \frac{E}{T^2} = \frac{v}{2t} = \frac{V}{2T}$, par cette même observation. Il est donc faux que ces forces soient entr'elles dans le rapport infini de *AD*, à *AB*, & que par conséquent, leur rapport puisse être exprimé par le rapport des deux côtés *AD*, *AB*, du parallélogramme *ADB o*, à la maniere de deux forces uniformes, d'autant plus que ces forces sont de différente nature, l'une *AB*, uniforme, proportionnelle au tems *t*, l'autre *AD*, accélératrice constante proportionnelle au quarré du même tems. Il est évident qu'il n'existe aucun parallélogramme possible, dont l'un des côtés étant supposé *t*, l'autre puisse être exprimé par t^2.

La tangente *ABR*, doit être simplement considérée comme la ligne que suivroit le corps, s'il n'étoit animé d'aucune force centripète, & sur laquelle doivent être pris les tems, pendant lesquels l'action de la force accélératrice seroit considérée. Ainsi on peut donc dire que dans le tems exprimé par *AB*, la force centrale feroit tomber le corps de la hauteur *AD*; mais non pas que les forces sont entr'elles comme *AB*, est à *AD*; parce que si les forces étoient dans ce rapport, la force centrale *AD*, n'étant alors qu'un infiniment

petit du ſecond ordre, à l'égard de la force de projection *AB*, elle ne pourroit détourner le mobile de ſa direction rectiligne *ABR*, dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, que d'une quantité qui lui ſeroit proportionnelle, c'eſt-à-dire, d'un infiniment petit du ſecond ordre; par exemple, $\ddot{x}$; enſorte que la ſomme de toutes les forces centrales, qui auroit détourné le mobile de ſa direction par la tangente *ABR*, dans une ſomme infinie de tems $\dot{t}$, infiniment petits, ſeroit $S\ddot{x} = \dot{x}$, c'eſt-à-dire, que dans un tems fini t, le mobile ne ſeroit détourné de la direction d'une tangente finie *ABR*, que d'une quantité infiniment petite $\dot{x}$. Donc alors le mobile décriroit cette tangente finie dans un tems fini t, bien loin de circuler ſur la circonférence d'un cercle, puiſqu'il ne ſeroit détourné de la direction de cette tangente, dans un tems fini t, que d'une quantité infiniment petite $\dot{x}$. Il eſt donc faux que les forces ſoient entr'elles comme *AB*, eſt à *AD*; ni qu'on puiſſe les conſidérer comme les deux côtés d'un parallélogramme *ABDo*.

Pluſieurs Géomètres ſe ſont formé les idées les plus fauſſes ſur le rapport de la force de

projection avec la force centrale, afin d'étayer le systême de la génération des courbes, qui seroient décrites autour d'un point par la voie du parallélogramme. L'Auteur des présentes observations conserve encore une Note écrite de la propre main de l'Abbé de la Caille de l'Académie Royale des Sciences, à qui il avoit communiqué ces observations, sur les vices qu'il trouvoit dans cette méthode d'engendrer des courbes par cette suite infinie de parallélogrammes dont les différens arcs de la courbe seroient les diagonales : elle porte : « qu'une force finie, modifiée par » une force infiniment petite, fait décrire » une courbe ; parce, dit-il, qu'à chaque » instant infiniment petit, la force infini- » ment petite, produit un effet infiniment » petit, qui devient fini dans un tems fini.»

Rien n'est plus absurde que cette idée d'une force infiniment petite qui produit un effet sur une force finie, dans un tems infiniment petit ; car cet effet est exactement nul à tout instant, étant à tout instant détruit par l'action de la force finie : si un corps *A* est mû de *A*, en *R*, par une force finie, il est évident qu'il n'y a qu'une force finie qui puisse le détourner de cette direction, & qu'une force infiniment petite ne produi-

roit exactement aucun effet ſur ce corps. Que ce corps ſoit, par exemple, le globe de la Terre, emporté dans la direction de la tangente *AR*, qu'il tend à décrire, en tournant autour du ſoleil *C*. Suppoſons qu'à chaque inſtant infiniment petit *t*, ce globe reçoive l'action d'une chiquenaude, dirigée de tous les points de la tangente finie *ABR*, vers le ſoleil *C*, je demande s'il ne ſeroit pas du dernier ridicule de prétendre que l'action de cette chiquenaude ſeroit capable de détourner la Terre de ſa direction *ABR*, pour lui faire décrire le cercle *AMA*, autour du ſoleil *C*? L'action de cette chiquenaude étant nulle, à tout inſtant, par rapport à l'action qui emporteroit la Terre dans la direction de la tangente *ABR*, ne produiroit viſiblement aucun effet ſur ce globe. Il eſt donc de toute fauſſeté qu'*une force infiniment petite, puiſſe modifier une force finie, & faire décrire une courbe à un corps.* On s'écarte même ici des principes de M. Newton, qui ſuppoſe toujours que *le coup que le corps reçoit de la force centrale ſoit aſſez vif*, ce ſont ſes expreſſions, *pour pouvoir le détourner*. Mais ſi ce coup ne partoit que d'une force infiniment petite,

il eſt évident qu'il ne produiroit aucun effet ſur un corps, ſur-tout de dimenſions finies, & que par conſéquent il ne ſeroit point aſſez fort pour détourner le mobile de ſa direction par la tangente.

La plûpart des Géomètres ſont pleins d'idées de cette eſpèce, qui ſervent quelquefois de fondement à leurs formules, & & autres procédés géométriques, & que dès-là ils qualifient de *vérités*, ou *propoſitions démontrées*. L'action de la force qui emporteroit le globe *A*, dans la direction de la tangente *ABR*, eſt toujours finie, quoique conſidérée dans un tems infiniment court, parce que cette force a été imprimée tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible, & par l'effet d'une ſeule & même impulſion *ABR*. Donc le globe *A*, ne pourroit être détourné de la direction *AR*, que par l'action d'une force finie, qui lui ſeroit imprimée tout à la fois, & dans un inſtant également indiviſible dans une direction différente de la direction *ABR*, & nullement par l'action d'une force infiniment petite : & dans le cas où c t e action finie ſeroit répétée à tout inſtant, le mobile décriroit une courbe.

Ainſi un mouvement curviligne réſulte de l'action combinée de deux forces finies

qui agiroient ſur un même corps dans différentes directions, & dont l'action de l'une de ces forces ſeroit renouvellée à tout inſtant. Il eſt néanmoins des Géomètres qui improuvent l'uſage que l'on fait ici du parallélogramme. M. le Chevalier de Borda, de l'Académie Royale des Sciences, ayant entendu ces obſervations, contre cette méthode de décrire les courbes, dit en propres termes, qu'*on avoit eu tort de l'employer*. Un autre Géometre, grand Newtonien, l'a déſapprouvée au point d'avoir cherché même à en juſtifier M. Newton, qu'on accuſoit de l'avoir introduite dans la théorie des loix des forces centrales.

Un troiſième Géomètre écrivoit : » vous avez la plus grande raiſon de ſoutenir fauſſe l'application du parallélogramme à la meſure des forces centrales : » 1°. Les forces, centripète & centrifuge, » devant être égales dans le cercle, il s'enſuivroit une égalité entre le rayon & le » coſinus d'un angle. 2°. Par la décompoſition ordinaire, l'effet de la force centrale devroit être le même que la normale $\frac{g \cdot ds}{dy}$ (g étant la vîteſſe initiale, s l'arc » parcouru, & y l'ordonnée de cet arc,) » on auroit pour le cercle $\frac{g \cdot a}{a-x}$ ou $\frac{g \cdot a}{-x}$, ce

» qui ne s'accorde pas avec les résultats
» connus. Ces observations, & une infinité
» d'autres vous donnent absolument gain
» de cause sur cette question. »

On verra par la suite plusieurs autres observations qui confirment la vérité de ces pricipes. Qu'un corps sur-tout de dimensions finies, ne peut jamais décrire, autour de son centre de pesanteur, qu'une courbe rigoureuse, & que l'idée d'une courbe, considérée comme poligone d'une infinité de côtés, ne doit point être admise, lorsqu'il s'agit de sa génération réelle & physique.



TROISIEME OBSERVATION.

Sur l'égalité des ſorces centripète & centriſuge, conſidérées dans un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire un cercle autour de ſon centre, en même tems centre de peſanteur du corps.

TOUT le monde ſait que ſi un corps *A*, (*fig.* 4.) décrit un cercle *ABA* en tendant continuellement vers ſon centre *C*, la force centripète du corps eſt néceſſairement égale à ſa force centrifuge : mais pour voir avec la derniere évidence la vérité de cette propoſition, il faut ſuppoſer que le rayon *AC*, ſera un fil, tendu par l'action d'une main qui ſeroit placée au centre *C*, du cercle décrit, au moment où la force de projection frapperoit le corps dans la direction de la tangente *ADT*. Il eſt clair que le corps tendroit à tout inſtant à ſuivre la direction de la tangente *AT*, vers laquelle il ſeroit pouſſé, & par conſéquent à alonger le fil *CB*, d'une quantité *BD* ; & que pour empêcher le rayon de s'alonger, il eſt néceſſaire que l'action de la main en *C*, faſſe un effort

contraire, tendant à raccourcir le rayon *CB*, d'une quantité *Bo*, égale à *BD*; & dès-lors le corps étant mû à tout instant entre deux forces contraires *BD*, *Bo*, l'une tendante à alonger le fil *CB*, d'une quantité *BD*, & l'autre à le raccourcir d'une quantité *Bo*, égale à *BD*, les deux forces seroient nécessairement égales, puisqu'elles feroient parcourir, dans le même tems, au même corps *A*, les espaces égaux *BD*, *Bo*, & partant, le mobile décriroit un cercle, puisqu'il circuleroit entre deux forces contraires & égales *BD*, *Bo*, qui ne lui permettroient ni de s'approcher de la tangente *ADT*, ni du centre *C*, du cercle décrit, plus dans un tems que dans un autre.

Telle est la maniere de concevoir la génération du mouvement circulaire, dont il résulte, 1°. que la main, placée en *C*, oppose à tout instant une force finie, & non infiniment petite, pour empêcher le mobile de suivre la direction de la tangente *ADT*: 2°. que la méthode du parallélogramme n'a nulle application à la génération de ce mouvement curviligne, l'arc décrit *AB*, ne pouvant être considéré comme la diagonale du petit parallélogramme *ANDB*, attendu la formation d'une force

centrifuge *BD*, à laquelle il eſt indiſpenſable d'avoir égard, contraire & égale à la force centripète *Bo*, dont il réſulte que le corps, dans ſon mouvement de tranſlation, doit être conſidéré, comme tiré en même tems, à l'extrémité *A*, du fil ou rayon *CA*, par deux forces contraires & égales *BD*, *BO*, dont les directions ne forment point d'angle entr'elles, & qui par conſéquent excluent toute idée de parallélogramme *ANDB*. L'on voit démonſtrativement qu'il en ſeroit de même de tout autre mouvement curviligne, autour d'un ſeul & même point fixe *C*, centre de peſanteur du corps; & que le corps, dans ſon mouvement de tranſlation, doit toujours être conſidéré comme tiré, dans le même tems, par deux forces contraires *BD*, *Bo*, qui ceſſeroient d'être égales, ſi la courbe décrite n'étoit plus un cercle décrit de ſon centre *C*, & que par conſéquent la nature de la courbe décrite par le corps dépendra uniquement du rapport des forces centripète & centrifuge *BO*, *BD* : dans le cas de l'égalité des deux forces, le corps circulant à l'extrémité d'un rayon conſtant *CA*, décriroit néceſſairement un cercle. Dans le cas de l'inégalité des deux forces, le rayon variera, ſoit par accroiſſement, ſoit par

décroiſſement, ſuivant que la force centrifuge ſera plus grande que la force centripète, ou la force centripète plus grande que la force centrifuge, & dès-lors la courbe décrite ne ſera plus un cercle.

REMARQUE.

Nous croyons devoir avertir ici que cette propoſition & celles qui ſuivent, ſuppoſent que la force centrale ne fait rien perdre à la force de projection, hypotèſe qui n'eſt nullement exacte; car l'on doit voir que la force centripète *B o*, étant en oppoſition avec la force centrifuge *BD*, détruit à tout inſtant cette derniere force; ce qui ne peut qu'affoiblir, dans tous les momens, le mouvement tangentiel *AT*, qui doit même finir par être entiérement détruit, comme on le démontre à la fin de l'ouvrage, où l'examen de cette queſtion a été renvoyé. Il ſuffit de dire ici que l'on a fait abſtraction de ce décroiſſement perpétuel d'action tangentielle, cauſé par la peſanteur du corps, tant dans cette propoſition que dans celles qui ſuivent.



QUATRIEME OBSERVATION.

Sur la nature des forces centripètes des corps qui décriroient différens cercles, autour d'un centre commun de pesanteur.

Il est très-facile de prouver que, si deux corps *A* & *E*, situés à différentes distances d'un centre commun *C*, de pesanteur, décrivent chacun un cercle autour de ce centre, le corps *E*, qui en seroit plus voisin, aura plus de force centripète, plus de force centrifuge, & plus de vîtesse de révolution que le corps, *A*, (*fig.* 5.) qui en seroit plus éloigné; car que le cercle *ENE*, décrit par le corps *E*, soit supposé le cercle égal *AMCA*, & le centre de pesanteur du corps *E*, transporté de *C* en *E*, il est évident que le corps *E*, transporté en *A*, décriroit le même cercle autour du point *E*, qu'il eût décrit au point *E*, autour du centre *C*, puisque ce corps se trouveroit toujours à la même distance de son centre de pesanteur, soit en *E*, soit en *A*. Mais il est manifeste que la circonférence *AMCA*, s'éloigneroit plus de la direction de la tangente commune *AP*, suivant la-

quelle le corps *E*, ſeroit frappé, que la circonférence plus grande *ABDA*, que décriroit le corps *A*, frappé dans la même direction *AP* ; & en conſéquence qu'il faudroit plus de force centripète au corps *E*, qui auroit beſoin d'un plus grand effort pour s'éloigner davantage de la direction de la tangente commune *AP*, qu'au corps *A*, qui décriroit une circonférence *ABDA*, plus rapprochée de la direction de cette même tangente. Mais le corps *E*, ayant plus de force centripète que le corps *A*, aura auſſi, par la troiſieme obſervation, plus de force centrifuge, & auſſi plus de vîteſſe de révolution ; puiſque les forces centrifuges ſont toujours proportionnelles aux vîteſſes de révolution. Donc les corps placés plus près du centre commun *C*, de peſanteur, qui décriroient des cercles, auront plus de force centripète, plus de force centrifuge & plus de vîteſſe de révolution, que ceux qui décriroient de plus grands cercles.

Dans le cas où le cercle décrit par le corps ſeroit infiniment rapproché de la direction de la tangente *AP*, on voit que ſa force centripète ſeroit infiniment petite ; qu'alors le centre de peſanteur du corps ſeroit infiniment éloigné, & que les ten-

dances

dances pourroient être considérées comme paralleles entr'elles, puisqu'elles ne coïncideroient que vers un centre infiniment distant du corps. Dans ce cas le cercle décrit se transformeroit en parabole : & en effet l'équation au cercle $y^2 = 2rx - x^2$ se réduit à $y^2 = 2rx$, qui est une équation à une parabole dont le paramètre seroit $2r$, lorsque le rayon r devient infini, ou encore dans le cas où le rayon r, restant fini, l'équation au cercle $y^2 = 2rx - x^2$, seroit à un arc de cercle supposé infiniment petit ; car dans ces deux cas le terme x^2 devient nul à l'égard du terme $2rx$, ce qui réduit l'équation à $y^2 = 2rx$. Mais le corps, dans ces deux cas, esttoujours présumé à une distance infinie de son centre de pesanteur, ce qu'il importe de bien remarquer, attendu que cette distance se mesure toujours par l'abscisse ou sinus-verse x, qui devient toujours infiniment petite, relativement au rayon r, soit lorsque ce rayon devient infini, & que l'arc décrit est supposé fini, soit lorsque l'arc décrit est supposé infiniment petit, & le rayon r fini. Il est manifeste que dans les deux cas, l'abscisse x, entreroit une infinité de fois dans le rayon r du cercle décrit, & que par conséquent mesurant la distance du corps à son centre

de pesanteur par cette abscisse x, il en résultera toujours que le corps, dans les deux cas, seroit infiniment éloigné de ce centre, ce qui fait que l'équation au cercle $y^2 = 2rx - x^2$, se réduit également dans l'un & l'autre cas, à l'équation à une parabole dont le paramètre seroit $2r$, puisque dans les deux cas x^2 devient nul à l'égard de $2rx$, & cela par la raison précisément que l'abscisse x, seroit, dans ces deux mêmes cas, contenue une infinité de fois dans le rayon r.

Delà il suit que la force centripète d'un corps qui décriroit une parabole, peut toujours être considérée comme celle d'un corps qui décriroit un cercle infini, ou un arc infiniment petit d'un cercle fini.



CINQUIEME OBSERVATION.

Sur la mesure de la force centripète d'un corps qui décriroit un cercle par son centre.

LE corps *A*, est supposé décrire le cercle *ADA*, (*fig. 6.*) en tendant continuellement vers le centre *C*, de ce cercle, centre de pesanteur du corps : on demande de déterminer la mesure de la force centrale de ce corps pendant le cours d'un tems *t*, employé à décrire un arc quelconque *AD*, de ce cercle, fini ou infiniment petit.

La force centrale de ce corps peut être considérée en deux manieres : 1°, par l'espace, par exemple *AE*, que la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans le tems *t*, employé à décrire l'arc quelconque *AD* ; & dès-lors *AE*, feroit la mesure de cette force pendant le tems *t*, puisque ce feroit l'espace que le corps auroit parcouru, en vertu de cette même force, dans le cours de ce tems. 2°. On peut la considérer encore par un espace *AN*, qu'elle auroit fait décrire au même corps, s'il avoit employé à décrire un espace, tout l'effort

qu'auroit fait ce corps pour se retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il auroit tendu à parcourir, en décrivant l'arc *AD* dans le cours du tems *t*. Cette force seroit alors celle même qui auroit concouru à la génération de l'arc *AD*, ce qui est sa vraie force centrale: car la force qui lui feroit parcourir l'espace *AE*, dans le même tems *t*, est une force accélératrice, très-différente de celle qui concourt à la génération de l'arc décrit *AD*, & qui retire le mobile de la direction de toutes les tangentes qu'il auroit tendu à parcourir en décrivant ce même arc, qui est une force uniforme, puisque le corps fait le même effort à tout instant, au premier comme au dixième, centième, millième ... &c. pour demeurer sur la circonférence du cercle qu'il décriroit. Que le corps *A*, pesant sur son centre de pesanteur *C*, soit supposé en repos & soutenu sur la circonférence d'un cercle matériel *ADA*, ce corps presseroit par son poids cette circonférence. Or la force de cette pression est précisément le poids du corps, ou sa force centrale qui seroit évidemment la même à tous les points de cette circonférence. Mais il est clair que la force de cette pression constante, pendant le cours d'un tems *t*, employé à dé-

crire un arc quelconque *AD*, ne peut être exprimée par l'eſpace *AE*, que la force accélératrice feroit parcourir au corps pendant le même tems t, mais par un eſpace *AN*, décrit uniformément pendant ce même tems t, avec la force conſtante avec laquelle le corps preſſeroit la circonférence *ADA*, le corps preſſeroit cette circonférence en vertu d'une ſeule & même impulſion centrale & permanente qui lui auroit été communiquée ; laquelle étant employée à lui faire décrire un eſpace *AN*, le lui feroit décrire uniformément, cet eſpace *AN* : feroit donc proportionnel au tems t, employé à le parcourir, tandis que l'eſpace *AE*, décrit, non par l'effet d'une ſeule & même impulſion, mais par une ſomme d'impulſions que le corps auroit reçues dans le cours du même tems t, ſeroit proportionnel au quarré t^2 de ce même tems. Donc l'eſpace *AN*, & non l'eſpace *AE*, ſera la meſure de la peſanteur du corps ou de ſa force centrale, conſidérée pendant un tems t, & l'eſpace *AE*, ſera la meſure de la force accélératrice conſidérée pendant le même tems. Il ne faut donc point confondre la peſanteur avec la force accélératrice, comme on l'a fait juſqu'ici.

Nommons e, ε, deux eſpaces que la pe-

ſanteur conſtante du corps lui feroit parcourir uniformément dans deux tems t, T; & ε, E, deux eſpaces que la force accélératrice lui feroit parcourir pendant les mêmes tems t, T: l'on aura donc d'une part : $e : \mathfrak{e} :: t : T$, & par conſéquent $e^2 : \mathfrak{e}^2 :: t^2 : T^2$, & d'autre part : $\varepsilon : E :: t^2 : T^2$. D'où on tirera $e^2 : \mathfrak{e}^2 :: \varepsilon : E$, & par conſéquent $e : \mathfrak{e} :: \sqrt{\varepsilon} : \sqrt{E}$.

Ainſi les eſpaces que la peſanteur conſtante d'un corps qui décriroit un cercle, lui feroit parcourir, ſeront toujours égaux, ou tout au moins proportionnels à la racine quarrée de ceux que la force accélératrice lui feroit parcourir pendant les mêmes tems. L'on aura donc $AN = \sqrt{AE}$. Par conſéquent la véritable meſure de la force centrale d'un corps qui décriroit un arc AD, de cercle, dans un tems t, ſera $\sqrt{AE}$, en ſuppoſant que AE fût l'eſpace que la force accélératrice auroit fait parcourir au corps pendant le même tems t.

Le raiſonnement précédent s'applique à la force centrale conſidérée en elle-même, ſans qu'il ſoit néceſſaire de la conſidérer dans le mouvement circulaire. On peut demander, par exemple, quelle eſt la meſure de la peſanteur de nos graves ? Cette meſure n'eſt point les quinze pieds d'eſ-

pace qu'ils parcourent, dans la premiere ſeconde, vers le centre de la terre, c'eſt là la meſure de la force accélératrice. La meſure réelle de la peſanteur de ces corps, c'eſt la racine quarrée de ces quinze pieds d'eſpace qu'ils parcourent d'un mouvement uniformément accéléré; parce qu'en effet ſi un de ces graves *A* (*fig.* 7.) en repos ſur un plan fixe *BD*, & tendant par ſa gravité vers le centre *C*, de la Terre, employoit à parcourir un eſpace l'effort conſtant qu'il fait à chaque inſtant contre le plan *BD*, il eſt clair qu'il parcourroit cet eſpace d'un mouvement uniforme, & par le ſeul effet de la même impulſion centrale qui le fait tendre de *A*, en *C*, & preſſer le plan *BD*, au lieu que quand le corps tombe, par l'effet de la force accélératrice, le mobile eſt toujours mû par une ſomme d'impulſions, qui conſtituent ſa force accélératrice, & nullement ſa peſanteur proprement dite, telle qu'elle eſt quand le corps eſt en repos, où le corps ne tend à ſon centre que par l'effet d'une ſeule & premiere impulſion que la force centrale lui communique, & ſans recevoir de nouvelles impulſions de cette force. Or l'on peut conſidérer l'eſpace que cette ſeule & premiere impulſion feroit parcourir au corps dans un

tems *t*, & c'eſt cet eſpace qui doit être pris pour meſure de la peſanteur, ou force centrale du corps, pendant ce tems. Si donc la force accélératrice fait parcourir à nos graves environ quinze pieds dans la première ſeconde, la peſanteur, pendant ce même tems, ſera en raiſon de $\sqrt{15^p}$, proche la ſurface de la terre; c'eſt-à-dire que nos graves parcourroient un peu moins de 4 pieds dans une ſeconde, d'un mouvement uniforme, en vertu de l'impulſion centrale qui les fait tendre vers le centre de la Terre, lorſqu'ils ſont en repos.

Mais ſi la force accélératrice fait parcourir aux corps qui ſont dans la région de la Lune 3600 fois moins d'eſpace que la même force n'en fait parcourir à ceux qui ſont près de la ſurface du globe terreſtre, dès-lors les peſanteurs réelles à ces deux diſtances du centre de la Terre, ſeront entre elles non pas comme 1 à 3600, mais comme $\sqrt{1}$ à $\sqrt{3600}$, c'eſt-à-dire comme 1 à 60, & dès-lors ce qui peſeroit comme 1 vers la région de la Lune, peſera comme 60 proche la ſurface de la Terre, & la Lune étant à environ 60 rayons du centre de la Terre, il s'enſuit que les peſanteurs réelles ſeroient en raiſon inverſe des ſimples diſtances, & non point en raiſon inverſe du

quarré des diſtances, comme on le prétend. Le ſyſtême des peſanteurs, en raiſon inverſe & doublée des diſtances, n'eſt donc fondé que ſur la fauſſe meſure que l'on donne à la peſanteur, d'un eſpace parcouru d'un mouvement accéléré, qui eſt la meſure de la force accélératrice, tandis que la peſanteur, à la même diſtance du centre de tendance, étant conſtante, ne peut avoir pour meſure qu'un eſpace qu'elle feroit décrire d'un mouvement uniforme.

On a confondu ici la peſanteur avec la force accélératrice, & donné pour meſure à la premiere de ces forces la meſure de la ſeconde. Si l'on retranche l'accélération dans une ſuite d'eſpaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré, ce qui reſtera à ces eſpaces, ſera ce qui auroit été parcouru, dans le même tems, d'un mouvement uniforme, depuis le premier inſtant du mouvement; comme il réſulte du tableau ci-contre, qui démontre aux yeux que les eſpaces que la peſanteur, (conſidérée en ſoi, avant toute viteſſe acquiſe par l'accélération du mouvement,) feroit parcourir aux corps, ſont toujours la racine quarrée

Tems.	*Eſpaces accélérés.*	*Eſpaces uniformes.*
1er t.	1	1
2e t.	3	1
3e t.	5	1
4e t.	7	1
5e t.	9	1
&c.	&c.	&c.

de ceux que la force accélératrice leur feroit décrire dans le même tems, à compter depuis le premier inſtant du mouvement.

SIXIEME OBSERVATION

Sur l'expreſſion de la force accélératrice, & de la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, ou telle autre courbe que l'on voudra ſuppoſer.

LE corps *A*, eſt ſuppoſé décrire un cercle autour du centre *C*, ſon centre de peſanteur : on demande de déterminer l'expreſſion de ſa force accélératrice, & celle de ſa peſanteur.

Que le corps *A* (*fig.* 8) ſoit ſuppoſé parcourir la tangente infiniment petite *A E*, dans deux tems *t*, égaux, décrivant la moitié *AB*, de cette tangente dans le premier tems *t*, & la ſeconde moitié *BE*, dans le ſecond tems *t*, égal au premier. J'obſerve que dès que le corps eſt ſuppoſé décrire un cercle autour du centre *C*, ſa force centripète étant égale à ſa force centrifuge, par la troiſième obſervation, le corps doit être tiré, à chaque inſtant, par deux forces égales *bA*, *d B*; *Ae*, *f E*, la première cen-

tripète tendante à raccourcir le rayon d'une quantité *Ab*, dans un tems *t*, & la seconde centrifuge tendante à l'alonger d'une quantité *dB*, égale à *b A*, dans le même tems *t*; & que par conséquent dans deux tems 2 *t*, infiniment petits, la force centripète tendroit à raccourcir le rayon *AC*, d'une quantité *A e*, égale à la quantité *E f*, dont la force centrifuge tendroit à l'alonger pendant ce même tems 2 *t*.

Pour ſavoir actuellement ſi *A b* & *A e* ſont les eſpaces que la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans les tems *t*, 2 t, qu'il employeroit à parcourir les tangentes *A B*, *A E*, il n'y a plus qu'à ſavoir ſi ces eſpaces ſont égaux, dans le cercle, aux eſpaces *dB*, *fE*, que la force centrifuge lui feroit parcourir dans les mêmes tems *t* & 2 *t*; car il eſt évident que ce n'eſt que par cette égalité que l'on peut s'aſſurer qu'en effet *A b*, *A e*, feront les hauteurs verticales dont la force accélératrice feroit tomber le corps, dans le tems préciſément qu'il employeroit à parcourir les tangentes *AB*, *AE*.

Nommons *x*, le ſinus-verſe, ou l'abſciſſe *A b*, *A e*. *y*, l'ordonnée *b d*, *e f*, égale à la tangente *A B*, *A E*, quand l'arc *A d*, *A f*, eſt ſuppoſé infiniment petit. L'é-

quation à cet arc de cercle ſera : $y^2 = 2rx - xx$, d'où on tirera : $\frac{y^2}{2r - x} = x$, qui, dans ce cas, ſe réduit à $\frac{y^2}{2r} = x$, puiſque x devient nul à l'égard de $2r$.

Ainſi l'expreſſion de l'abſciſſe ou ſinus-verſe x, ſera $\frac{y^2}{2r}$.

Nommons z, la fléche dB, fE, ou petite ligne compriſe entre le cercle & la tangente ; on aura, par la propriété du cercle $\overline{z + 2r \times z} = y^2 = 2rz + z^2$. Donc $\frac{y^2}{2r+z} = z$, qui ſe réduit à $\frac{y^2}{2r} = z$, dans le cas d'un arc Ad, Af infiniment petit, puiſque, dans ce cas, z devient nul à l'égard de $2r$. Donc l'expreſſion de la fléche ſera : $\frac{y^2}{2r}$, l'on aura donc : $\frac{y^2}{2r} = x = z$, c'eſt-à-dire que l'abſciſſe ou ſinus-verſe x, ſera égale à la fléche, & par conſéquent ces deux lignes exprimeront les forces centripète & centrifuge du cercle. L'expreſſion de ces forces ſera donc $\frac{y^2}{2r}$, c'eſt-à-dire le quarré de la tangente AB ou de l'ordonnée bd, ou de l'arc Ad, diviſé par le diamètre du cercle décrit. Et attendu que le diamètre $2r$ eſt une quantité conſtante, il

s'ensuit que les espaces que la force accélératrice feroit parcourir en différens tems, seroient toujours entr'eux comme les quarrés des arcs décrits pendant ces mêmes tems. Ainsi l'arc *Af*, étant supposé double, triple, quadruple . . . &c. de l'arc *Ad*, il seroit décrit dans un tems double, triple, quadruple, &c. du tems employé à décrire l'arc *Ad*; & par conséquent la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans ce tems double, triple, quadruple . . . . . &c. un espace *Ae*, 4, 9, 16... fois plus grand. Donc la force accélératrice du cercle est la même que celle qui précipite les corps au centre de tendance, puisqu'elle feroit parcourir des espaces proportionnels aux quarrés des tems employés à les parcourir.

Si l'on nomme donc *C*, un arc quelconque fini, ou infiniment petit, d'un cercle dont le rayon seroit *r*, décrit par un corps, l'expression de la force accélératrice, ou hauteur dont le mobile seroit tombé, pendant le cours du tems *t* employé à décrire cet arc *C*, en vertu de la force accélératrice, sera toujours $\frac{C^2}{2r}$, & par conséquent l'expression de sa pesanteur sera, par l'observation précédente, $\sqrt{\frac{C^2}{2r}} = \frac{C}{\sqrt{2r}}$. La pesanteur d'un corps qui décriroit un cercle,

eſt donc en raiſon compoſée de la raiſon directe de l'arc quelconque C, que ce corps décriroit dans un tems t, & de la raiſon inverſe & ſous-doublée du diamètre de ce cercle ; & comme le diamètre $2r$ eſt une quantité conſtante, il s'enſuit que la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle, conſidérée en différens tems, eſt en raiſon directe de l'arc décrit pendant les mêmes tems, ce qui convient en effet à une force uniforme, telle qu'eſt celle qui opere la peſanteur conſtante dans un corps qui décriroit un cercle.

On obſervera combien la démonſtration que l'on vient de donner de l'expreſſion $\frac{C^2}{2r}$ eſt rigoureuſe, puiſqu'on l'a fondée uniquement ſur l'égalité des forces centripète & centrifuge, qui a lieu dans le cercle ; car on n'a conclu que l'abſciſſe, ou ſinus-verſe AB, AC, étoit véritablement l'eſpace que la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans un tems t, pendant lequel il décriroit la tangente AB, AE, ou l'arc Ad, Af, que parce que cet eſpace étoit égal à l'eſpace dB, fE, que la force centrifuge lui feroit décrire dans le même tems : & en effet, puiſque ces deux forces ſont égales dans le mouvement cir-

culaire, il faut bien que le cercle donne le cas d'un ſinus-verſe égal à une fléche ; & ce cas a lieu quand l'arc décrit eſt ſuppoſé infiniment petit. Dans tous les cas d'un arc fini, l'abſciſſe n'étant point égale à la fléche, ne peut exprimer la hauteur dont le corps ſeroit tombé, pendant le tems employé à décrire l'arc; & auſſi dans tous ces mêmes cas la tangente n'eſt point égale à l'arc décrit, mais elle eſt toujours plus grande.

Delà il ſuit que pour être autoriſé à exprimer par l'abſciſſe *A B*, d'une courbe quelconque *A d M*, (*fig.* 9.) ſuppoſée décrite autour d'un point fixe *F*, centre de peſanteur d'un corps *A*, l'eſpace que la force centrale qui auroit lieu dans cette courbe, lui feroit parcourir, dans le tems préciſément que la force de projection lui feroit décrire la tangente *A E*, il faudroit avoir déterminé 1°, le rapport des forces centripète & centrifuge, pendant le tems employé à décrire la tangente *A E*; 2°, prouver enſuite que les eſpaces *A B*, *d E*, ſeroient, à tout inſtant, dans le rapport de ces mêmes forces, & ſeroient chacun, ceux que ces forces feroient parcourir au corps, pendant ce même tems; car il ſeroit poſſible que pendant ce tems, la force

centripète qui auroit lieu dans cette courbe, fît parcourir à ce corps plus ou moins d'espace que celui qui seroit exprimé par l'abscisse *A B*; & que de même la force centrifuge lui fît décrire, dans le même tems, plus ou moins d'espace que celui qui seroit représenté par la fléche *d E*, ainsi qu'il arrive même au cercle dans tous les cas où l'arc décrit ne seroit pas indéfiniment petit; car alors ni l'abscisse, ni la fléche, ne peuvent servir de mesure aux forces centripète & centrifuge.

Pour s'assurer donc de la légitimité de cette mesure, l'on doit observer qu'ayant une fois déterminé l'expression de ces forces dans le cercle, rien n'est plus facile que de déterminer l'expression de ces mêmes forces dans une courbe quelconque; & en effet, si l'arc décrit en tems égal, n'est point un arc de cercle, il arrivera de deux choses l'une, ou que le rayon vecteur augmentera, ou qu'il diminuera en tems égal. Dans le premier cas la force centrifuge y sera plus grande que la force centripète, & dans le second la force centripète y sera plus grande que la force centrifuge. Mais la différence des rayons vecteurs exprime toujours très-exactement la quantité dont l'une des forces surpasseroit l'autre

l'autre. En ajoutant donc, ou retranchant cette différence des rayons vecteurs, à l'expreſſion de la force centripète du cercle que le corps tendroit à décrire à chaque inſtant, & qu'il décriroit en effet, ſi les deux forces étoient égales, il s'enſuit que l'on aura très-exactement l'expreſſion de la force centripète qui feroit décrire une courbe quelconque autour d'un point.

Soit donc une courbe quelconque *ANM*, (*fig.* 10.) ſuppoſée décrite par un corps *A*, autour du point fixe *F*, ſon centre de peſanteur, par l'action du mouvement angulaire du rayon vecteur *AF*, lequel eſt ſuppoſé décrire en tems égal *t*, les angles *AFo*, *oFe*, *eFg*... &c. finis, ou infiniment petits.

Nommons *r*, le rayon vecteur au commencement du tems *t*, & *R*, ce même rayon à la fin du même tems, ce rayon croîtra, ou décroîtra en tems égal *t*. Dans le premier cas, il ſera moindre au commencement du tems *t*, qu'à la fin, & dans le ſecond, il ſera plus grand : par conſéquent la différence des rayons vecteurs, à la fin du tems *t*, ſera $\pm R \mp r$; décrivant du centre *F*, de peſanteur les arcs de cercle *Aq*, *od*, *ef*, *gh*... &c. les parties de

rayon vecteur $o\,q$, $e\,d$, $g\,f$... &c. étant la différence des rayons vecteurs, exprimeront par conséquent les espaces qu'il faudra ajouter ou retrancher à l'expression de la force centripète du corps, considéré comme décrivant les arcs de cercle $A\,q$, $o\,d$, $e\,f$, $g\,h$... &c.

Ainsi il faudra donc dire: si le corps avoit effectivement décrit aux points A, o, e, g... &c. les arcs de cercle $A\,q$, od, ef, gh.... &c. dans un tems t : nommant r, le rayon vecteur au commencement du tems, C, l'arc décrit pendant ce même tems; l'expression de la force accélératrice auroit été $\frac{C^2}{2r}$; mais il faut ajouter, ou retrancher à l'espace exprimé par $\frac{C^2}{2r}$, les espaces Oq, $e\,d$, $g\,f$..... &c. que le corps parcourroit de plus, ou de moins, dans le cours du même tems t, c'est-à-dire qu'il faudra ajouter ou retrancher à $\frac{C^2}{2r}$, la différence des rayons vecteurs $R-r$. Donc l'expression de la force accélératrice d'un corps qui décriroit une courbe quelconque $A\,N\,M$, autour d'un seul & même point fixe F, centre de pesanteur du corps, sera: $\frac{C^2}{2r}$

$\pm R \mp r$; & ſubſtituant actuellement à R, r, les rayons vecteurs propres à chaque courbe, il eſt évident que l'on auroit l'expreſſion de la force centripète propre à chacune.

Mais dans une courbe AcM, (*fig.* 11.) dont les rayons vecteurs FA, Fc, iroient en croiſſant, la fléche Bc, quand l'angle AFc eſt ſuppoſé infiniment petit, peut à l'origine de la courbe, exprimer la force centrale du corps : car décrivant du centre F, de peſanteur avec le rayon AF, l'arc de cercle Ad, meſure de l'angle infiniment petit AFc, il eſt évident que la fléche Bc eſt égale à $Bd - cd = \frac{C^2}{2r} - R + r$.

Il en ſeroit de même vers l'origine A d'une courbe (*fig.* 12.) dont les rayons vecteurs FA, Fd... &c. décroîtroient en tems égal, la fléche Bd, ſeroit égale à Bc, $+ cd = \frac{C^2}{2r} + R - r$.

Mais cette fléche ne peut plus ſervir de meſure à la force centrale, dans un autre point que celui de l'origine de la courbe ; par exemple, dans un point M, où la tangente MN (*fig.* 11.) ne ſeroit plus perpendiculaire ſur le rayon vecteur FM; car décrivant l'arc de cercle infiniment petit MS,

& menant ſa tangente MV, l'on auroit $\frac{C^2}{2r}$ $- R + r = VS - VS - NV = - NV$, pour expreſſion de la force centripète, tandis que la fléche ſeroit NQ. Il s'en faudroit donc de la quantité NV, que la force centripète du corps fût même égale à zéro, puiſque cette force auroit pour valeur la quantité négative $- NV$; & comme cette expreſſion de la force ne devient négative que parce que la tangente MN, n'eſt plus perpendiculaire ſur le rayon vecteur FM, comme elle l'étoit vers l'origine A, de la courbe; il s'enſuit quevers cette origine, la force centrale du corps étoit réduite à zéro; & en effet l'arc AC, de la courbe peut être conſidéré comme une petite ligne droite, tangente à l'arc de cercle Ad, & par conſéquent comme confondu avec la tangente AB; car cet arc & cette tangente ſe rapprocheroient toujours davantage, à proportion que l'angle FMN, formé par la tangente & le rayon vecteur, ſeroit moins obtus, & approcheroit davantage de la valeur d'un angle droit. Par conſéquent, vers le point A, de l'origine de la courbe, l'arc & la tangente ſeroient infiniment rapprochés, ce qui fait qu'on peut les conſidérer comme ſenſiblement confon-

dus vers ce point, & par conséquent regarder la fléche CB, expression de la force centripète, comme réduite à zéro. Et en effet, l'expression $\frac{C^2}{2r} - R + r$ de cette force se réduit à zéro, dans le cas où l'arc Ac, de la courbe, & la tangente AB, peuvent être considérés comme confondus; parce qu'alors la différence des rayons vecteurs $R - r = Bd = \frac{C^2}{2r}$; & l'expression de la force centrale devient $\frac{C^2}{2r} - R + r = \frac{C^2}{2r} - \frac{C^2}{2r} = 0$.

Il suit donc delà qu'un corps ne pourroit jamais décrire de courbes non rentrantes en elles-mêmes, autour d'un point fixe F, son centre de pesanteur; puisque sa force centrale se réduiroit à zéro, dès l'origine même A de la courbe, & à une quantité moindre que zéro; dans tout autre point de cette courbe; parce qu'un arc infiniment petit AC, de cette courbe, plus grand que l'arc de cercle Ad, peut toujours être considéré comme une petite ligne droite AB, tangente à cet arc; & qu'alors l'expression $\frac{C^2}{2r} - R + r$ de la force centrale, se réduit à zéro vers le

point *A* ; & à une quantité moindre que zéro, dans tout autre point de la courbe.

Il eſt également manifeſte que les fléches *OP* ne peuvent être non plus la meſure de la force centrale dans les courbes où les rayons vecteurs *FA*, *FE*, *FQ* (*fig.* 13.), iroient en diminuant, lorſque la tangente *EO*, ceſſeroit d'être perpendiculaire ſur le rayon vecteur *EF*; car décrivant du centre *F*, de peſanteur, l'arc de cercle *EN*, & menant ſa tangente *ME*, la force centrale du cercle décrit avec ce rayon ſeroit *MN* $= \frac{C^2}{2r}$, & cette force augmentant de la quantité *NP*, c'eſt-à-dire de la différence des rayons vecteurs $R-r$, quand le corps décriroit l'arc *EP* de la courbe, il en réſulte que la force centrale du corps, décrivant l'arc *EP* de la courbe, ſeroit $MN + NP = \frac{C^2}{2r} + R - r$, qui eſt une quantité bien plus grande que la fléche *OP*. C'eſt donc à tort que les Géomètres expriment, dans tous les cas, les forces centrales par les fléches des arcs naiſſans ; ces fléches ne pouvant être l'expreſſion de ces forces, que vers le point *A*, de l'origine de la courbe, & quand la tangente eſt perpendiculaire ſur le rayon vecteur.

L'expreſſion $\frac{C^2}{2r} + R - r$ de la force centrale eſt toujours la même dans les courbes fermées de l'eſpece de *ADEQ*, où les rayons vecteurs diminuent en allant de *A* vers *Q*, ſoit au point *A* de l'origine, ſoit vers tout autre point; & comme la différence $R - r$ des rayons vecteurs, eſt toujours une quantité poſitive, dans ce cas, il s'enſuit que jamais la force centrale $\frac{C^2}{2r} + R - r$ ne peut dans ces courbes ſe réduire à zéro, comme il arrive dans les courbes non fermées: ce qui démontre que ces courbes peuvent être décrites autour d'un point fixe *F*, & ſont même les ſeules qui puiſſent être décrites de la ſorte. Ainſi un corps *A*, tendant vers un point fixe *F*, ne pourra jamais décrire qu'une courbe fermée autour de ce point; ce qui ſimplifie infiniment la théorie des loix des forces centrales, en réduiſant à une ſeule eſpece de courbes, & à la ſeule expreſſion $\frac{C^2}{2r} + R - r$, de la force centrale accélératrice, toutes les courbes qu'il eſt poſſible qu'un corps décrive autour d'un point, & toutes les forces qui les feroient décrire.

Si la courbe décrite par le corps eſt un cercle, décrit par ſon centre, la différence $R - r$ des rayons vecteurs étant zéro, l'expreſſion de la force accélératrice devient dans ce cas $\frac{C^2}{2r} + R - r = \frac{C^2}{2r}$.

Si la courbe décrite eſt une ellipſe; décrite par ſon foyer F, (*fig.* 14.) la différence des rayons vecteurs $R - r$, ſera DQ, dans le trajet du corps de A en Q, ou $EB = fF$, dans le cours d'une demi-révolution AQB; c'eſt-à-dire que quand le mouvement angulaire auroit pour meſure la demi-circonférence de cercle ADE, le mobile allant de A en B, s'approcheroit plus du centre qu'il ne feroit, s'il parcouroit cette demi-circonférence, d'une quantité EB, égale à l'intervalle fF, des deux foyers de la courbe, ce qui eſt en effet véritable. Donc l'expreſſion de la force accélératrice ſera toujours $\frac{C^2}{2r} + R - r$.

Si la courbe décrite eſt ſuppoſée la courbe AM, (*fig.* 15.) qui s'écarteroit à l'infini de ſon axe AT; le plus grand arc décrit par le rayon vecteur CA, ſeroit un arc fini, moindre que 180 degrés; par exemple, l'arc AB: enſorte que le rayon

vecteur CBS, ne rencontreroit la courbe AM, qu'à une distance infiniment éloignée du centre C de pesanteur. L'expression de la force, relativement à la totalité AB, du mouvement angulaire du corps, seroit, en supposant toujours l'arc $AB = C$, & $AC = r$, $\frac{C^2}{2r} - R + r$. Mais dans ce cas le rayon vecteur $R = CS$, est infini à l'égard du rayon $r = AC$, & de l'espace fini exprimé par $\frac{C^2}{2r}$. Donc, dans ce cas, l'expression $\frac{C^2}{2r} - R + r$ de la force se réduiroit à $-R$, puisque $\frac{C^2}{2r} + r$, seroient nuls à l'égard du rayon vecteur R, ce qui démontre de nouveau qu'un corps ne peut jamais décrire aucune espece de courbes non fermées, autour d'un seul & même point fixe C, puisque l'expression $\frac{C^2}{2r}$, dans laquelle entre celle de son mouvement angulaire, qui est toujours $\frac{C}{r}$, s'y réduit à zéro, & que le corps resteroit livré à l'action d'une seule force R, qui l'écarteroit à l'infini du point C; précisément comme il arriveroit s'il ne parcouroit qu'une ligne droite $ANOG$, vis-à-vis

d'un point *C*, vers lequel le corps n'auroit aucune tendance, ou tout au plus qu'une tendance infiniment petite, dont par conséquent il s'éloigneroit à l'infini, sans jamais changer de direction.

Dans le fait, un corps qui seroit supposé décrire une courbe non fermée *A M*, autour de son centre *C*, de pesanteur, remonteroit à l'infini au-dessus de ce centre, comme s'il parcouroit la droite indéfinie *A G* : son mouvement seroit donc successivement retardé, & par conséquent ce corps s'écarteroit toujours moins de ce centre en tems égal. Donc la différence des rayons vecteurs, en tems égal, seroit toujours moindre, & par conséquent cette différence, dans le cas où la force de projection du corps ne seroit pas infinie à l'égard de sa force centripète, finiroit par être réduite à zéro, dans un point de la courbe décrite; & dans les points suivans, les rayons vecteurs, loin d'augmenter, iroient en diminuant, comme il arrive dans l'ellipse décrite par l'un de ses foyers. Pour qu'il arrive donc que la différence des rayons vecteurs soit toujours moindre à l'infini, en même tems que les rayons vecteurs croîtroient à l'infini; il est clair que c'est une nécessité de supposer la force

de projection infiniment grande à l'égard de la force centripète, dès le premier instant que cette force frapera le corps; afin qu'il arrive que dans le point le plus éloigné de la courbe, c'est-à-dire à la fin d'un tems infini, la différence des rayons vecteurs, en tems égal, soit zéro, & que ce ne soit que vers ce point que ces mêmes rayons cessent de croître en tems égal.

Ainsi la génération d'une courbe non fermée, supposée décrite autour d'un point *C*, centre de pesanteur du corps, par laquelle ce corps remonteroit à l'infini au dessus de ce centre, & par conséquent seroit mû d'un mouvement successivement retardé à l'infini, en s'éloignant néanmoins à l'infini de ce même centre, la génération, dis-je, d'une telle courbe, suppose nécessairement que la force centripète du corps seroit infiniment petite; puisque ce ne seroit qu'après un tems infini que la différence $R - r$, des rayons vecteurs, en un tems égal t, fini, seroit zéro.

Mais il y a deux manieres qui produisent le même effet, de concevoir comment la force centripète d'un même corps seroit infiniment petite; premierement, dans le cas où le corps circuleroit autour d'un centre de pesanteur infiniment éloigné:

ſecondement, ſi ce centre n'eſt pas infiniment diſtant du corps, dans le cas où la force de projection de ce corps ſeroit infiniment grande à l'égard de ſa force centripète. D'où il ſuit qu'afin qu'un corps puiſſe décrire une courbe non fermée autour d'un point fixe, conſidéré comme ſon centre de peſanteur, ſa force centripète relativement à ce point devant être infiniment petite : ce corps doit être conſidéré, ou comme mû par une force de projection infiniment grande, ou comme à une diſtance infinie de ce centre ; & par conſéquent ſes tendances, comme ſenſiblement paralleles entr'elles, comme dans la parabole de Galilée : ce qui veut dire que, dans le fait, une courbe non fermée ne peut être décrite par un corps, qu'autant que les tendances ſeront paralleles entr'elles, & jamais quand elles coïncideront vers un centre qui ne ſeroit pas infiniment diſtant de ce corps ; puiſque, dans le dernier cas, la force de projection devroit être infiniment grande à l'égard de la force centripète, & alors celle-ci étant nulle à l'égard de la premiere de ces forces, le corps ne décriroit qu'une ligne droite *A G*, au lieu de parcourir une courbe *A M*.

Tout arc de parabole *A S*, peut être

considéré comme un arc de cercle décrit avec un rayon infiniment grand, puisque l'équation $y^2=2rx-x^2$ à l'arc *AS*, d'un cercle infini, se réduit à $y^2=2rx$ qui est à la parabole ; mais en considérant l'arc de parabole *A S*, comme l'arc d'un cercle infini, il est évident que cet arc ne differe plus de la tangente *A N*, dans laquelle il finit par se confondre quand le rayon *AC*, devient infini. Donc alors la fléche *N S*, qui à l'origine de la courbe peut exprimer la force centripète du corps, tendant au point *C*, se réduit à zéro, comme on l'a déja dit ; & dès-là le corps ne peut plus parcourir que la droite *A G* ; parce que quand le centre *C*, de pesanteur n'est pas infiniment distant du corps, la force centripète de ce corps ne peut devenir infiniment petite ou zéro, qu'autant que la force de projection du corps seroit infiniment grande.

Ainsi tout arc indéfiniment petit *AS*, de parabole, pouvant être considéré comme un arc d'un cercle décrit à l'extrémité du rayon *A C*, infiniment prolongé, pourra par conséquent être considéré comme exactement confondu avec la tangente *A N*, à l'arc de cercle *AO*, & par conséquent la

fléche NS, expreſſion de la force centripète du corps, tendant en C, ſera exactement réduite à zéro, lorſque le corps ſeroit ſuppoſé devoir décrire une parabole ASM, autour d'un point C, qui ne ſeroit point infiniment diſtant du corps A : & c'eſt préciſément là le réſultat de la formule $\frac{C^2}{2r} - R + r$, de la force centripète, lorſque la fléche NS, ſe réduit à zéro; parce que dans ce cas, la différence $R - r$, des rayons vecteurs, eſt $NO = \frac{C^2}{2r}$, & par conſéquent l'expreſſion de la force centripète devient $\frac{C^2}{2r} - \frac{C^2}{2r} = 0$.

La même vérité ſe prouve encore de pluſieurs manieres, quand un corps A, devroit remonter à l'infini au-deſſus de ſon centre C, de péſanteur, comme il arriveroit s'il devoit parcourir la droite AG; & que ſon centre de peſanteur fût en A, ou décrire la courbe ASM, autour du centre C : il eſt évident qu'il faudroit imprimer à ce corps la même vîteſſe que celle qu'il auroit acquiſe par le ſeul effet de ſa gravité, s'il étoit tombé de la hauteur infinie GA, ou MA, afin que ce corps pût parcou-

fig 15

rir le même eſpace infini *AG*, *AM*, en remontant continuellement au-deſſus de ſon centre de peſanteur, que celui qu'il auroit parcouru en deſcendant vers le même centre, ſoit directement par la droite *GA*, dans le cas où il devoit parcourir une ligne droite; ſoit en gliſſant, comme de deſſus un plan incliné, ſur la courbe non fermée *MSA*, dans le cas où il devroit décrire une telle courbe. Mais il eſt évident que la vîteſſe que le corps auroit acquiſe, après être tombé d'une hauteur infinie, & avoir parcouru les eſpaces *GA*, *MSA*, ſeroit infinie, puiſque cette vîteſſe auroit toujours augmenté, en un tems t, égal & fini; car il faut obſerver que les tems, les vîteſſes & les eſpaces parcourus, doivent toujours être d'un même ordre, & qu'on ne peut pas ſuppoſer qu'un corps, dans un tems fini t, n'acquierre que des vîteſſes infiniment petites, & ne parcoure que des eſpaces infiniment petits; car, dans ce cas, ces vîteſſes & ces eſpaces doivent être réduits à zéro; parce qu'en effet une vîteſſe infiniment petite, acquiſe dans un tems fini t; & un eſpace infiniment petit parcouru dans ce même tems fini, ne ſeroient abſolument rien. Ainſi le tems, l'eſpace, la vîteſſe,

doivent toujours être t, e, v. Dans le cas où le tems t, seroit supposé infiniment petit ou $\dot{t}$, l'espace & la vîtesse doivent être $\dot{e}$,$\dot{v}$; car supposant le mouvement uniforme, l'espace parcouru seroit toujours égal au produit du tems par la vîtesse. L'on auroit donc $e = tv$, & par conséquent $t = \frac{e}{v}$. Si donc t, exprime un tems fini, l'espace e, & la vîtesse v seront d'un même ordre que le tems, & seront aussi finis. Si t, n'exprime qu'un tems infiniment petit $\dot{t}$, alors l'espace & la vîtesse seront infiniment petits.... &c. & il en seroit de même dans le cas où le mouvement seroit accéléré ou retardé ; car dans le premier cas la vîtesse acquise est toujours proportionnelle au tems employé à l'acquérir ; & l'espace parcouru toujours proportionnel au quarré du tems employé à le parcourir. Par conséquent les tems, les vîtesses & les espaces parcourus seront toujours d'un même ordre. Quelque petite donc que pût être supposée la vîtesse que ce mobile auroit acquise, à la fin d'un tems fini t, que le corps auroit employé à parcourir l'arc fini *Mp*, de la courbe, vers son extremité *M*, cette vîtesse ne pourroit être que finie à la fin d'un tems fini t. Donc cette vîtesse, qui est toujours proportionnelle

proportionnelle au tems employé à l'acquérir, augmentant pendant une infinité de tems finis *t*, que le corps employeroit à descendre vers son centre *C*, de pesanteur, en continuant de glisser de *M* en *A*, sur la courbe non fermée *M PA*, seroit infinie quand le corps seroit parvenu au point *A*; & telle est la vîtesse qu'il faudroit lui imprimer pour le faire remonter par la courbe non fermée *ASPM* au-dessus de son centre *C*, de pesanteur, afin que ce corps pût décrire la même courbe en sens contraire, & remonter à l'infini au-dessus de ce centre, dans le même tems, & par le même chemin qu'il auroit employé & tenu en descendant vers ce même centre. Ainsi la génération d'une courbe non fermée *ASPM*, supposée décrite autour d'un point fixe *C*, centre de pesanteur d'un corps *A*, suppose toujours que la force de projection qui seroit imprimée au corps au point *A*, du départ, seroit telle que sa vîtesse en partant seroit infiniment grande, & que dès-là, sa force centripète seroit nulle, à l'égard de sa force de projection.

Le corps *A*, étant supposé décrire la courbe non fermée *ABCDEN*, autour fig 16

de ſon centre *F*, de peſanteur, le rayon vecteur *FA*, décriroit en tems *t*, égaux & finis les aires égales, *AFB*, *BFC*, *CFD*. . . . &c. Par conſéquent le mouvement angulaire du rayon vecteur décroîtroit en tems égal à l'infini. Donc vers l'extrémité *E* de la courbe, (*Fig.* 16), le rayon vecteur *FE*, n'auroit plus dans un tems *t*, fini, qu'un mouvement angulaire infiniment petit *EFN*, que l'on pourroit regarder comme l'élément du mouvement angulaire fini *AFB*, puiſqu'en effet l'arc circulaire *op*, meſure du mouvement angulaire infiniment petit *EFN*, ſeroit infiniment petit à l'égard de l'arc *AG*, meſure du mouvement angulaire fini *AFB*. Mais, par ce qui vient d'être dit, l'arc infiniment petit *o p*, qui ſeroit décrit dans un tems *t*, fini, ſeroit exactement zéro, puiſqu'un eſpace infiniment petit, décrit dans un tems *t*, fini, n'eſt abſolument rien dans le fait. Donc l'élément ou principe générateur du mouvement angulaire fini *AFB*, n'étant que zéro, il s'enſuit que le mouvement angulaire fini *AFB*, ſeroit également zéro, c'eſt-à-dire, ne pourroit exiſter, ſon élément ou principe générateur *op*, étant zéro.

Un arc fini *A G*, (x) ſuppoſé décrit dans

un tems t, fini, devenant l'arc infiniment petit op ($\dot{x}$) à la fin d'une infinité de tems t, il eſt clair que, par la même raiſon, un arc infiniment petit AS ($\dot{x}$) ſuppoſé décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, deviendroit, à la fin d'une infinité de tems $\dot{t}$, l'arc infiniment plus petit tG ($\ddot{x}$); ce que l'on peut encore déduire de cette analogie relative aux ordres des quantités : $\dot{x} : x :: t : \infty t$. qui exprime que l'ordre de l'arc $\dot{x}$, eſt à l'ordre de l'arc x, comme le tems fini t, durant lequel le corps auroit parcouru l'arc fini x, eſt au tems infini ∞t, dans le cours duquel l'arc fini x, auroit toujours décru, & ſeroit devenu l'arc $\dot{x}$. Diviſant actuellement chaque terme de cette proportion par l'infini, l'on aura : $\frac{\dot{x}}{\infty}$: ou $\ddot{x} : \frac{x}{\infty}$ ou $\dot{x} :: \frac{t}{\infty}$, ou $\dot{t} : \frac{\infty t}{\infty}$ ou t; c'eſt-à-dire, que l'on auroit cette analogie, dans l'ordre des quantités : $\ddot{x} : \dot{x} :: \dot{t} : t$, qui réſulte évidemment de la proportion ci-deſſus : $\dot{x} : x :: t : \infty t$; & qu'il eſt par conſéquent inconteſtable que ſi un arc fini x, ſuppoſé dé-

crit dans un tems t, fini, devient l'arc $\dot{x}$, à la fin d'un tems infini $\infty\, t$, de même un arc $\dot{x}$, ſuppoſé décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, deviendroit l'arc $\ddot{x}$, à la fin d'une infinité de tems $\dot{t}$, ou, ce qui eſt le même, dans le cours d'un tems t, fini.

Suppoſons à préſent une aire, ou un mouvement angulaire fini AFB, décrite dans un tems fini t, diviſée en une infinité de petites aires égales AFS, décrites chacune dans un tems $\dot{t}$ infiniment petit, l'arc AS, ($\dot{x}$) ſeroit la meſure du mouvement angulaire pendant le premier inſtant $\dot{t}$; mais cet arc, diminuant à l'infini, ne ſeroit plus vers l'extrémité tG, de l'arc fini AG, que tG ($\ddot{x}$). Or à ſuppoſer même que cet arc devînt conſtant & ne diminuât plus pendant tout le cours du ſecond tems fini t, employé à décrire la ſeconde aire finie BFC, égale à la premiere aire AFB, décrite dans le même tems; il eſt clair que l'arc décrit pendant cette ſuite infinie de tems $\dot{t}$, ou pendant le cours du tems fini t, égal à cette ſuite, ſeroit $S\ddot{x} = \dot{x}$. Ainſi dès la ſeconde aire

finie *BFC*, décrite dans un tems fini t, l'arc décrit feroit $\dot{x}$, ou zéro ; & comme le même raifonnement s'appliqueroit également à l'aire *AFB*, fuppofée divifée en deux aires égales *A* & *B*, & à l'aire *A*, fuppofée encore divifée en deux aires égales *C* & *D*, & ainfi à l'infini, & que toujours l'arc $\dot{x}$, décrit au premier tems $\dot{t}$, feroit réduit à $\ddot{x}$, vers l'extrémité de l'aire *A*, ou *C*... &c. L'on voit que fuppofant enfin une aire infiniment petite, divifée en deux aires égales *M*, *N*, décrites chacune dans un tems infiniment petit $\dot{t}$; fi au commencement de la premiere aire *M*, l'arc décrit étoit $\dot{x}$, vers la fin de la même aire, l'arc décrit ne feroit plus que $\ddot{x}$, ou un infiniment petit du fecond ordre, c'eft-à-dire, zéro. Ce qui démontre inconteftablement que le mouvement angulaire ne peut entrer dans la génération d'une courbe non fermée puifque ce mouvement s'y réduit toujours à zéro.

La même vérité peut encore fe démontrer très-fimplement en cette maniere : le mouvement angulaire du rayon vecteur *AF*, dans la génération d'une courbe

non fermée *ABDE*, ne peut jamais faire décrire qu'un angle fini ; par exemple, *AO*, moindre que 180 degrés, en tournant même pendant un tems infini autour du point *F*, centre de pesanteur du corps. Il est d'abord assez difficile d'entendre comment ce rayon *AF*, pourroit tourner pendant un tems infini autour du centre *C*, sans que jamais le point *A*, pût décrire un plus grand arc que l'arc *AO*, moindre que 180 degrés. L'on voit même que le tems, & l'espace parcouru seroient de différens ordres, puisque l'espace *AO* (*x*), parcouru seroit fini, & le tems employé à le parcourir infini ; & comment encore il pourroit arriver que deux points, pris sur ce même rayon, l'un *A*, toujours à la même distance du centre *F*, décriroit en tems égal, des arcs *AG*, *GH*, *HM*... &c. toujours plus petits ; tandis que le point extrême *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, de ce même rayon, parcourroit un espace infini, en s'éloignant à l'infini du centre *F*, de pesanteur.

Mais enfin à supposer même que toutes ces idées pûssent être aussi vraies qu'il est vrai qu'elles sont chimériques, fausses & absurdes ; il s'ensuivroit toujours que le rayon vecteur *AF*, seroit un tems

infini à décrire l'arc fini AO, ou x; son mouvement angulaire étant successivement diminué en tems t, égal & fini. Mais l'on peut toujours substituer un mouvement uniforme à un mouvement variable, pourvu que le corps parcoure le même espace dans le même tems, par l'un & l'autre mouvement. Supposons donc un mouvement uniforme, capable de faire décrire au rayon vecteur AF, l'arc AO (x), dans un tems infini ∞t. La vîtesse moyenne du corps seroit donc $\frac{x}{\infty t}$; c'est-à-dire, l'espace parcouru divisé par le tems employé à le parcourir : mais l'arc x, étant fini, la vîtesse $\frac{x}{\infty t}$, seroit infiniment petite, considérée même dans un tems t, fini. Donc cette vîtesse ne pourroit faire décrire au rayon vecteur AF, dans un tems t, fini, qu'un arc infiniment petit $\dot{x}$, qui se réduit toujours à zéro, quand le tems t, durant lequel il seroit décrit, est fini.

Dès que le corps ne peut décrire des espaces infiniment petits dans un tems t, fini, ce qui est évident ; on voit à l'œil, qu'il y auroit nécessairement un dernier arc fini op, qui termineroit le mouve-

ment angulaire ; puiſqu'en effet la ſomme de tous les arcs décrits *AG*, *GN*, *HM*.... *op*, n'étant égale qu'à un arc fini *AO*, moindre que 180 degrés, ne pourroit jamais être infinie, ni par conſéquent la ſomme des tems finis *t*, employés à décrire chacun de ces arcs finis. L'arc *AO*, étant fini, ne peut jamais être diviſé en une infinité d'arcs finis ; par conſéquent, le nombre des arcs décrits *AG*, *GN*, *HM*.... *op*.... ne pourroit jamais être que fini : ainſi que le nombre égal des tems *t*, employés à décrire ces mêmes arcs. La loi que ces arcs ſuivent dans leur décroiſſement, peut toujours ſe réduire à un décroiſſement uniforme qui produiroit le même effet à la fin du mouvement ; en ſuppoſant, par exemple, une quantité *m*, qui ſeroit la différence de l'arc ſuivant à l'arc précédent. Le premier étant *A*, le ſecond ſeroit $A - m$; le troiſieme $A - 2m$; le quatrieme, cinquieme... &c. $A - 3m$, $A - 4m$.... &c. Tous ces arcs étant décrits à la fin du même tems *t*, l'on auroit enfin un dernier arc décrit $A - N.m = 0$. D'où ſuivroit l'équation $A = N.m$, & $\frac{A}{m} = N$, qui ſeroit l'expreſſion de la durée du mouvement angulaire. Le tems

de la durée du mouvement feroit donc : $\frac{A}{m} = N.t.$

Pour que le mouvement angulaire pût être infini, ainfi que l'exigeroit la génération d'une courbe non fermée, fuppofée décrite autour d'un point *F*; l'on voit qu'il faudroit que la quantité *m*, qui exprimeroit le décroiffement du mouvement réduit à un décroiffement uniforme, fût infiniment petite à l'égard de l'arc *A* : car alors l'expreffion $\frac{A}{m} = N.t$, de la durée du mouvement angulaire, donneroit un tems infini, ce qui eft évident; puifque fuppofant *A*, infiniment plus grand que *m*, l'on auroit : $\frac{A}{m} = \frac{A}{\frac{A}{\infty}} = \infty = N.t.$ Donc le tems *N.t* de la durée feroit infini; & en effet dans le cas où les arcs finis *AB*, *BC*, ne différeroient entr'eux que d'une quantité infiniment petite, il eft clair que ces arcs étant fenfiblement égaux, le corps décriroit un cercle d'un mouvement uniforme, & qu'alors fon mouvement angulaire feroit infini.

Mais comme la quantité *m*, du décroiffement du mouvement angulaire, réduit à un décroiffement uniforme, ne pourroit

jamais être qu'une quantité finie, étant considérée dans une suite de tems t, finis; il s'ensuit que le tems $\frac{A}{m} = N.t$ de la durée du mouvement angulaire seroit toujours fini; & en conséquence, que ce mouvement ne pourroit entrer dans la génération d'une courbe infinie & non fermée *ADN*, qui ne pourroit être supposée décrite autour d'un seul & même point fixe *F*, centre de pesanteur du corps, qu'autant que le mouvement angulaire de ce corps seroit infini.

On est donc fondé à soutenir chimérique, fausse & absurde la génération des courbes non fermées, supposées décrites autour d'un seul & même point, ainsi que les prétendues loix des forces centrales, par lesquelles on les fait décrire; puisqu'on vient de prouver cette proposition de plusieurs manieres différentes.

On remarquera que le décroissement du mouvement angulaire en tems égal t, est au moins uniforme, à cause que ce décroissement procede de l'agrandissement successif des angles *FBS*, *FDV*.... &c. formés par les directions du mouvement par les tangentes *CS*, *DV*... &c. & les rayons vecteurs *FC*, *FD*.... &c. Cet

angle devenant toujours plus obtus, à mesure que la courbe s'éloigneroit davantage du point *A*, de l'origine; le mouvement angulaire y décroîtroit toujours davantage en tems égal *t*, puisque le mouvement s'éloigneroit toujours plus de l'état d'uniformité déterminé à l'angle de 90 degrés; & quand la direction du mouvement par la tangente est toujours perpendiculaire sur le rayon vecteur, qui est le cas où le corps décriroit un cercle, d'un mouvement uniforme: par conséquent l'angle, formé par la direction du mouvement, par la tangente & le rayon vecteur, devenant toujours plus obtus, à mesure que le corps décriroit des arcs de la courbe plus éloignés du point *A*, de l'origine, il s'ensuit que le mouvement angulaire du rayon vecteur y décroîtroit toujours davantage en tems égal *t*.



SEPTIEME OBSERVATION.

Sur la Génération du Mouvement circulaire.

Il y a peu de Géomètres qui ne ſachent que la vîteſſe avec laquelle un corps *A*, (*Fig.* 17) peſant ſur ſon centre *C*, de peſanteur, doit décrire un cercle *ABA*, eſt égale à celle que le corps auroit acquiſe, ſi on le ſuppoſoit tombé de la hauteur *AE*, moitié du rayon *AC*, par le ſeul effet de la force accélératrice; & néanmoins lorſqu'il s'agit d'aſſigner les forces qui feroient décrire cette courbe, on ne trouve dans la plupart des Auteurs que des choſes vagues, ſur les tangentes élémentaires, les ſinus-verſes, les flèches, & ſur-tout ſur le parallélograme des forces, dont on ne peut faire aucun uſage, lorſqu'il eſt queſtion de déterminer la force finie qui doit être imprimée au corps *A*, & dans un inſtant indiviſible, dans la direction de la tangente *AB*; & la force que doit lui imprimer, dans le cours d'un tems fini *t*, la force accélératrice pour que le corps puiſſe décrire le cercle *APA*.

Pour ſe former donc une idée claire &

juste du mouvement circulaire d'un corps autour d'un point fixe *C*, centre du cercle décrit, & en même tems centre des forces ; il suffira de concevoir que si le corps *A*, vient à être frappé par une force capable de lui faire décrire un espace *AD*, égal au rayon *AC*, ou à l'intervalle où le corps se trouveroit de son centre *C*, de pesanteur, dans une direction *ADB*, perpendiculaire à celle de sa gravité *AC*, & dans un tems *t*, égal à celui qu'employeroit le corps, à parcourir, par le seul effet de la force accélératrice, un espace *AE*, moitié de l'espace *AD*, que la force de projection lui feroit décrire uniformément; ce corps mû de cette sorte, décrira nécessairement la circonférence de cercle *APA*.

Pour prouver la vérité de cette proposition d'une maniere fort simple, il n'y aura qu'à faire voir que le quarré d'un arc *AP*, égal à la tangente *AD*, divisé par le diamètre *AT*, du cercle, est en effet égal à la hauteur *AE*, dont on suppose que le corps seroit tombé dans un tems *t*, employé à décrire la tangente *AD*; parce que la tangente *AD*, se repliant sur la circonférence *APA*, par l'action de la force centrale, y forme à la fin du tems *t*,

l'arc de cercle AP. Il faut donc prouver que $\frac{AP \times AP}{AT} = AE = \frac{c^2}{2r}$, l'expreſſion $\frac{c^2}{2r}$, eſt la formule générale des hauteurs dont la force accélératrice feroit tomber le corps dans le tems t, employé à décrire l'arc c, comme il réſulte de la ſixieme Obſervation.

Or, par l'hypothèſe, $AP = c$, $AE = \frac{r}{2}$, $AT = 2r$. Subſtituant donc dans l'équation $\frac{AP \times AP}{AT} = AE$, c à AP, $2r$ à AT, & $\frac{r}{2}$ à AE, l'on aura : $\frac{c^2}{2r} = \frac{r}{2}$, & en effet par la ſuppoſition $c = r$. Donc $\frac{c^2}{2r} = \frac{rr}{2r} = \frac{r}{2}$.

Delà il ſuit que la vîteſſe avec laquelle le corps décriroit le cercle, eſt en effet égale à celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit tombé de la hauteur AE, moitié du rayon AC.

On peut prouver la même propoſition d'une maniere encore très-ſimple & très-élégante, en obſervant que comme la vîteſſe avec laquelle le corps décriroit le cercle eſt conſtante, s'il exiſte un ſeul arc x, dans le cercle, qui puiſſe être parcouru avec la vîteſſe que le corps auroit

acquiſe, par l'action de la force accélératrice, dans un tems t, égal à celui qu'employeroit le corps à décrire ce même arc x, il étoit inconteſtable que cette vîteſſe devoit être celle même avec laquelle le corps devoit décrire le cercle entier. Pour parvenir donc à connoître cet arc x, on remarquera que l'expreſſion des hauteurs verticales étant toujours $\frac{c^2}{2r}$, dans le cas particulier de l'arc x, décrit avec la vîteſſe que le corps auroit acquiſe en tombant pendant tout le tems t, employé à décrire cet arc ; l'eſpace parcouru, par la force accélératrice, étant $\frac{x^2}{2r}$, cet eſpace ſeroit la moitié de l'arc x, décrit uniformément avec cette même vîteſſe, & pendant le même tems. L'arc x, ſeroit donc $\frac{2x^2}{2r} = \frac{x^2}{r} = x$.

Donc $x^2 = rx$, & par conſéquent $x = r$. Donc cet arc, eſt celui qui ſeroit égal au rayon du cercle décrit. Il n'exiſte donc point d'autre arc dans tout le cercle, qui puiſſe être décrit avec la vîteſſe que le corps auroit acquiſe, s'il étoit tombé pendant tout le tems t, employé à le décrire, & qui ſoit par conſéquent le double de l'eſpace que la force accélératrice feroit

parcourir à ce corps pendant ce même tems.

Si l'on nomme t, le tems que la force accélératrice employeroit à faire parcourir au corps le demi-rayon $\frac{r}{2}$ du cercle, l'on voit que le tems de la révolution entiere du corps sera environ $6\frac{2}{7}t$.

L'on doit voir encore que la même force feroit parcourir au même corps dans le tems $6\frac{2}{7}t$, de sa révolution, le triple & un septième de la circonférence du cercle décrit. Nommant C, cette circonférence, l'espace que feroit parcourir la force accélératrice, pendant le tems $6\frac{2}{7}$, seroit $3\frac{1}{7}C$.

Si l'on nomme T, le tems de la révolution d'un corps par la circonférence d'un cercle, t, le tems qu'il employeroit à décrire un arc quelconque x, de ce même cercle; l'espace que la force accélératrice feroit parcourir à ce corps, pendant le tems t, employé à décrire l'arc x, sera toujours : $\frac{x^2}{2r} = 3\frac{1}{7}C \times \frac{t^2}{T^2}$.

Si un corps A, est supposé recevoir une impulsion de la force de projection assez grande pour lui faire parcourir un espace AB (*Fig.* 17), égal à la circonférence

rence du cercle *APA*, dans un tems *T*, égal à celui de sa révolution, & qu'on le suppose animé en même tems d'une force centrale constante, égale à l'effort que feroit le corps à tout instant pour se retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendroit à parcourir, & qui étant employée à lui faire décrire un espace, lui fit parcourir uniformément dans le même tems *T*, un espace exprimé par $\sqrt{3\frac{1}{7}C}$, le corps, par ces forces combinées, décriroit le cercle *APA*, ce qui est évident par la cinquième Observation. On voit que c'est ici la vraie force centrale du cercle, celle qui est véritablement employée à le retirer à tout instant de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendroit à parcourir, & dont l'effet est de replier, par une action égale, la tangente *AB*, sur la circonférence *APA*. Nulle portion de la force accélératrice, n'est visiblement employée à produire cet effet, qui résulte de l'action d'une force uniforme, qui par conséquent doit être exprimée par l'espace $\sqrt{3\frac{1}{7}C}$, qu'elle feroit parcourir à un corps uniformément dans le tems *T*, de sa révolution. Par conséquent la force par la tangente sera à la

force de la pesanteur, comme C, est à $\sqrt{3\frac{1}{7}C}$, puisque ces espaces sont ceux que les deux forces feroient décrire au corps dans le même tems T, de sa révolution.

Si des corps décrivent différens cercles, autour d'un centre commun de pesanteur; leurs forces accélératrices, en tems égal, seront entr'elles comme les rayons de ces mêmes cercles, divisés par le quarré des tems des révolutions; c'est-à-dire, comme $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$; car les espaces parcourus, par l'action des forces accélératrices, dans un tems commun N, seroient : $3\frac{1}{7}C \times \frac{N^2}{T^2}$, & $3\frac{1}{7}C \times \frac{N^2}{t^2}$: divisant par le quarré N^2, du tems commun, & substituant les rayons R, r, aux espaces $3\frac{1}{7}C$, $3\frac{1}{7}c$, qui sont dans le même rapport, le rapport des forces accélératrices sera comme : $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$, ou comme : $\left.\begin{matrix}\frac{R}{T^2}\\ \frac{r}{t^2}\end{matrix}\right\} = \frac{Rt^2}{rT}$. Par conséquent le rapport des pesanteurs réelles des deux corps sera $\sqrt{\frac{Rt^2}{rT^2}} = \frac{t}{T}\sqrt{\frac{R}{r}}$

On prouveroit de même que les vîteſſes de ces corps ſeroient entr'elles comme $\frac{R}{T}$, à $\frac{r}{t}$, ou comme $\sqrt{\frac{1}{R}}$ à $\sqrt{\frac{1}{r}}$; & que les quarrés des tems des révolutions ſont proportionnels aux cubes des diſtances, ou rayons des cercles parcourus; car les vîteſſes étant $\frac{R}{T}$, $\frac{r}{t}$, les quarrés des vîteſſes ſeroient : $\frac{R^2}{T^2}$, $\frac{r^2}{t^2}$, Donc l'on aura cette analogie : $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} :: r : R$; puiſque chacun de ces cercles étant décrit avec la vîteſſe que le corps auroit acquiſe, après avoir parcouru le demi-rayon de ſon cercle, les quarrés de ces vîteſſes ſeroient proportionnels aux demi-rayons, ou aux rayons de ces mêmes cercles. Donc l'analogie ci-deſſus donnera l'équation $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$. D'où l'on déduit, avec la plus grande facilité, la ſeconde loi de Képler, ſi fameuſe en aſtronomie. $R^3 : r^3 :: T^2 : t^2$.

Cette loi peut encore ſe déduire de ce raiſonnement ſimple : le tems T, de la révolution d'un corps eſt toujours en raiſon composée de la circonférence, ou rayon R, du cercle décrit, & de la raiſon

inverſe de la vîteſſe $\sqrt{\frac{1}{R}}$. L'on aura donc T, en raiſon de $\frac{R}{\sqrt{\frac{1}{R}}}$, & par conſéquent T^2, en raiſon de $\left.\frac{R^2}{\frac{1}{R}}\right\} = R^3$. Donc le quarré du tems de la révolution du corps, ſera toujours en raiſon du cube de la diſtance, ou du rayon du cercle décrit.

Dans le cas de différens cercles parcourus par des corps, autour de leur centre commun de peſanteur, les forces accélératrices ſeront entr'elles, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, ou rayons des cercles décrits ; car ces forces ſont entr'elles comme $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$. Subſtituant aux quarrés T^2, t^2, des tems des révolutions, les cubes des rayons R^3, r^3, qui ſont dans le même rapport, l'on aura le rapport des forces comme : $\frac{R}{R^3}$ à $\frac{r}{r^3}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{R^2}$ à $\frac{1}{r^2}$, c'eſt-à-dire encore, en raiſon inverſe du quarré des rayons. Et par conſéquent, les peſanteurs réelles de ces corps ſeront entr'elles comme $\sqrt{\frac{1}{R^2}}$ à

$\sqrt{\frac{1}{r^2}}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{R}$ à $\frac{1}{r}$, ou en raiſon inverſe des ſimples diſtances, ou rayons des cercles décrits.

Ces différentes loix ſont autant de vérités géométriques, de la certitude deſquelles il n'eſt par conſéquent pas permis de douter.

Comme le tems des révolutions entre dans le rapport des forces accélératrices, & dans celui des peſanteurs; puiſqu'on vient de prouver que les forces étoient entr'elles comme $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$, & les peſanteurs dans le rapport de $\frac{\sqrt{R}}{T}$ à $\frac{\sqrt{r}}{t}$: l'on peut encore en déduire une nouvelle preuve contre l'hypothèſe de la génération des courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point fixe : car comme le tems T, t, de la révolution par la circonférence de ces courbes ſeroit infini, comme ſeroit celui de la révolution d'un corps qui ſeroit ſuppoſé devoir parcourir un cercle infini; il s'enſuit que ces courbes pourroient être aſſimilées au cercle infini, & que l'on pourroit en conclure que les rayons R, r, s'alongeroient à proportion que les tems T, t, des révo-

lutions seroient plus longs, & que par conséquent quand ces tems deviendroient infinis, comme dans les courbes non fermées, le corps circuleroit à l'extrémité d'un rayon vecteur infini, sa force centripète devenant infiniment petite; & que ce n'est qu'à l'extrémité de tels rayons, & non point à l'extrémité de rayons finis, & quand la force centripète du corps seroit infiniment petite, que les corps pourroient être supposés décrire des courbes, autour d'un seul & même point fixe, comme on l'a déja dit de la parabole.

HUITIEME OBSERVATION.

Sur la génération du Mouvement elliptique.

SI un corps *A*, tendant vers son centre de pesanteur *F*, (*Fig.* 18), est frappé dans une direction *AD*, perpendiculaire à celle de sa gravité *AF*, par une force qui lui communique plus ou moins de vîtesse que celle qui seroit requise pour qu'il pût décrire un cercle, autour du même centre *F*; ce corps, par ces forces combinées, décrira une ellipse, autour du point *F*,

qui sera l'un des foyers de cette courbe.

Pour prouver la vérité de cette proposition, il suffira de faire observer que la somme des forces centripète & centrifuge est une quantité constante, lorsqu'un corps circule autour d'un centre *F*, & que l'une des forces regagne toujours très-exactement ce que perd l'autre force; puisque si le corps a plus de force centrifuge dans un point de la courbe, il a nécessairement, à ce même point, d'autant moins de force centripète; & s'il a plus de force centripète, il doit avoir d'autant moins de force centrifuge; ensorte que la somme des deux forces demeure invariablement la même dans tous les points de la courbe décrite.

Il faut observer en second lieu l'effet que produit sur le corps, la variation de l'angle formé par le rayon vecteur *MF*, & la tangente *ME*, qui exprime toujours la direction de la force de projection. Quand le corps ne décrit point un cercle, cet angle est tantôt plus grand, tantôt plus petit, tantôt droit, tantôt aigu, tantôt obtus. Quand cet angle est aigu, comme au point *M*, la direction *ME*, de la force de projection étant plus rapprochée de la direction *MF*, de la force cen-

trale, il eſt évident que le corps doit être plus pouſſé vers le centre *F*, des forces, puiſqu'alors une partie de l'effet de la force de projection *ME*, doit ſe faire dans la direction *MF*, de la force centrale. Et en effet, ſi l'on ſuppoſe que la direction *ME*, ſe confonde avec la direction *MF*; il eſt inconteſtable que la force centrale ſeroit alors augmentée de toute celle de projection. Si donc cet accroiſſement de la force centrale eſt de la totalité de celle de projection, dans le cas où l'angle *EMF*, formé par les directions des deux forces, ſeroit infiniment petit, ou infiniment aigu; il eſt évident que cet accroiſſement ne ſera que d'une partie de la force, quand cet angle ſera moins aigu, & ſe rapprochera davantage de l'angle droit. Cet accroiſſement diminuant donc, à meſure que l'angle *EMF*, ſe rapprocheroit davantage de la valeur d'un angle droit, ſeroit zéro, quand l'angle ſeroit de 90 degrés, ce qui eſt le cas du cercle. D'où l'on voit que le cercle, décrit de ſon centre, eſt la ſeule courbe où la force de projection n'ajoute, ni ne retranche à ſa force centrale. Les rayons vecteurs décroîtront donc en tems égal, pendant que l'angle formé par les directions des deux

forces sera aigu; puisqu'une partie de la force de projection seroit employée à pousser le corps vers son centre *F*, de pesanteur; & par la raison contraire, si l'angle *EMF*, devient obtus, comme au point *N*, la direction *NQ*, de la force de projection, s'éloignant davantage de la direction *NF*, de la force centrale, & plus que si le corps décrivoit un cercle; une partie de la force de projection sera employée à pousser le corps hors du centre *F*, de mouvement; ce qui fera croître les rayons vecteurs en tems égal. Ainsi les rayons diminueront, quand l'angle formé par la direction des deux forces sera aigu, parce qu'alors la force de projection ajoutera à la force centrale. Ils augmenteront quand cet angle sera obtus, parce qu'alors la force de projection, en poussant le corps hors du centre, ajoutera à sa force centrifuge; & enfin ces rayons seront constans, quand cet angle sera droit, parce qu'alors la force de projection n'ajoutera ni à la force centrale du corps, ni à la force centrifuge, & le mobile, dans ce dernier cas, décrira par conséquent un cercle.

On voit donc comment une seconde force intervient pour accroître ou dimi-

nuer l'action de la force centrale, & que par conséquent, ce n'est point à l'action variable d'une même force, comme M. Newton l'a supposé, que doit être attribuée cette augmentation, ou diminution de tendance au centre *F*, de pesanteur, quand le corps décrit une autre courbe que le cercle. M. Newton convertit ici en mystère impénétrable, un effet des plus simples, & dont la cause saute aux yeux. L'effet du décroissement, ou de l'accroissement des rayons vecteurs est attribué à l'action d'un centre *F*, attractif, qui attire le corps en raison sous-doublée de sa distance à ce même centre; & par-là il assigne une cause mystérieuse, impénétrable à l'esprit humain, à un effet naturel, produit par la seule variation de l'angle formé par la direction de la force de projection, avec la direction de la force centrale.

L'on doit observer en troisième lieu, que la vîtesse de révolution d'un même corps, avec une même force *F*, de projection qui lui auroit été imprimée dans l'origine du mouvement, doit croître quand le rayon vecteur diminuera, & que le corps circuleroit plus près du centre; & décroître au contraire quand ce rayon s'a-

longera, & que le corps circuleroit plus loin du centre de ſon mouvement; ce qui eſt une vérité évidente par elle-même, & qui n'a beſoin que d'être expoſée pour être ſentie.

De ces trois Obſervations : ſavoir, 1°, que la ſomme des forces centripète & centrifuge eſt toujours une quantité conſtante, lorſque le corps circule autour de ſon centre de peſanteur; 2°, Que l'augmentation ou la diminution de la force qui pouſſe le corps au centre, eſt un effet de la force de projection; 3°, Et que le corps circule plus vîte, ou plus lentement, avec une même force de projection *F*, imprimée dans l'origine du mouvement, ſuivant qu'il ſeroit plus près ou plus loin de ce même centre. De ces trois Obſervations, dis-je, il réſulte que le corps ne pourra décrire qu'une ellipſe par l'un de ſes foyers, lorſque la force de projection *AD*, qui lui ſeroit imprimée ſeroit moindre, ou plus grande que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire un cercle, autour de ſon centre *F*, de peſanteur; car tout corps qui recevroit, par exemple, moins de vîteſſe que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire un cercle, n'auroit qu'une vîteſſe moindre

que celle qu'il auroit acquiſe après être tombé de la moitié de la hauteur, par exemple, *AF*, qui le ſépareroit de ſon centre *F*, de tendance; mais en rapprochant ſucceſſivement le centre *F*, de tendance de ce corps, il arriveroit qu'on pourroit le placer dans un point *C*, où après avoir parcouru la moitié du rayon moindre *AC*, ce corps auroit acquis, à cette diſtance, une vîteſſe égale à celle qui lui auroit été imprimée, & avec laquelle il pourroit décrire un cercle dont *AC*, feroit le rayon. Ainſi à proportion que la vîteſſe qui auroit été imprimée au mobile ſeroit ſuppoſée moindre, à proportion le point *C*, autour duquel il devroit circuler pour pouvoir décrire un cercle, avec cette vîteſſe imprimée, ſe rapprocheroit du corps *A*, & s'éloigneroit du point *F*. Par conſéquent une moindre vîteſſe imprimée au corps annonceroit toujours que le corps ſeroit trop éloigné de ſon centre *F*, de peſanteur pour pouvoir décrire un cercle autour de ce centre; & ce ſeroit le contraire ſi la vîteſſe imprimée au corps étoit plus grande que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire la même courbe autour de ce centre.

Suppoſons donc un axe *AB*, dont

C, ſeroit le point du milieu. Si le corps décrivoit un cercle autour de *C*, il auroit une vîteſſe égale à celle qu'il auroit après être tombé de la moitié de *AC*; & ſi l'on exprimoit ſa force centripète par le rayon *AC*, qui répreſenteroit l'eſpace que cette force lui auroit fait parcourir dans un tems *t*; ſa force centrifuge qui, dans ce cas, ſeroit égale à ſa force centripète, pourroit s'exprimer auſſi par le rayon *CB* $= AC$, & la ſomme des deux forces par $CB + AC$.

Mais ſi le corps, circulant autour d'un point *F*, ne décrit point un cercle autour de ce point, ce ſera une preuve qu'il aura reçu moins ou plus de vîteſſe qu'il ne faudroit pour qu'il pût le décrire. Or la ſomme $CB + AC$, des forces, ſeroit toujours la même, ſoit autour du point *C*, ſoit autour du point *F*; puiſque ſi d'une part le mobile en *A*, ayant moins de vîteſſe de révolution, & par conſéquent moins de force centrifuge que s'il décrivoit un cercle autour de *C*, & le corps ſe trouvant moins ſoutenu au-deſſus du centre que s'il décrivoit un cercle, peſera par conſéquent d'autant plus ſur le même centre; & ſa force centripète ſe trouvera augmentée de toute la quantité dont

ſa force centrifuge ſeroit diminuée : d'autant plus que, dans ce cas, l'angle formé par la direction des deux forces eſt aigu en allant de *A* en *B*, & qu'alors la force de projection ajoute à la force centripète ce qu'elle retranche préciſément de la force centrifuge. Ainſi la ſomme $AC+CB$, des deux forces ſera toujours la même, ſoit que le corps décrive un cercle autour de *C*, ou une courbe quelconque autour de *F*.

Si donc les forces centripète & centrifuge, quand le corps étoit ſuppoſé décrire un cercle autour de *C*, étoient au point *A*, dans le rapport de *AC*, à *CB*, qui eſt un rapport d'égalité, elles ſeront dans le rapport de *AF*, à *FB*, quand le corps décrira une autre courbe autour de *F*; puiſque d'une part la ſomme $AF+FB$, des deux forces, doit toujours être égale à $AC+CB$, & que d'autre part la partie *CF*, qui ſeroit retranchée de la force centrifuge *CB*, doit être ajoutée à la force centripète *AC*.

Delà il ſuit que ſi l'on nomme *D*, l'axe *AB*, & que l'on exprime par le rayon vecteur *R*, pris dans un point quelconque de la courbe, l'une des deux forces, ou l'eſpace qu'elle feroit parcourir dans un

tems t; l'autre force, ou l'efpace qu'elle feroit parcourir, dans le même tems, fera toujours $D - R$. Ce qui eft la propriété caractériftique de l'ellipfe; puifque la fomme des deux rayons vecteurs $R + D - R = D$, menés par les deux foyers de la courbe, eft toujours égale au grand axe D, de l'ellipfe. L'on voit que cette ellipfe ne différe en rien, de l'ellipfe qui feroit décrite par les deux foyers f, F, à caufe que l'action du foyer f, eft réunie à l'action du foyer principal F, & que le rayon vecteur fe raccourcit ou s'alonge, par l'action combinée des deux forces, autour du foyer principal F, précifément comme il arriveroit fi le corps étoit fuppofé décrire cette courbe, par le moyen d'un fil tendu FM, fM, dont les deux extrémités feroient attachées aux deux foyers f, F, à la maniere de l'ovale, dite du *Jardinier*, comme cela devoit être en effet. On voit l'extrême facilité avec laquelle on démontre la génération du mouvement elliptique, & le rapport même des forces centripète & centrifuge à tous les points de l'ellipfe décrite; car la fomme des deux forces étant exprimée par le grand axe D, de la courbe, & l'une des forces par le rayon vecteur R, l'autre force eft tou-

jours $D-R$. D'où il ſuit que les deux forces ſont entr'elles, à tous les points de la courbe décrite, comme les diſtances du corps aux deux foyers de cette courbe, & les aires décrites par un même rayon vecteur, toujours proportionnelles aux tems employés à les décrire; puiſque ces aires étant l'effet d'une même ſomme de forces, ne peuvent qu'être égales en tems égal, & doubles, triples, quadruples.... &c. dans un tems double, triple, quadruple... &c.

Il n'y a point de loi dont la vérité fût plus importante à démontrer, dans la théorie des forces centrales, que celle de la conſtance de la ſomme des forces centripète & centrifuge de tout corps qui ſeroit ſuppoſé circuler autour de ſon centre de peſanteur, & de l'augmentation ou diminution de l'une de ces forces, de la quantité préciſément dont l'autre force diminueroit, ou augmenteroit; car cette loi ſeule fait connoître quelles ſont les courbes qui peuvent être décrites autour d'un point fixe, & celles qui ne peuvent pas l'être.

En effet le corps étant ſuppoſé décrire une courbe quelconque, autour d'un point F, ſon centre de peſanteur; ce corps aura néceſſairement une force centripète p,

&

& une force centrifuge f, dont la ſomme ſera toujours une quantité conſtante D, par la loi qu'on vient de démontrer. L'on aura donc, à tous les points de la courbe décrite, $P + f = D$. D'où on tirera : $P = D - f$, & $f = D - P$; mais j'obſerve que la quantité $P + f$, où la ſomme des deux forces conſidérées dans un tems t, fini, ne pourra être qu'une quantité finie ; c'eſt-à-dire, que les deux forces enſemble ne pourroient faire parcourir au corps qu'un eſpace D, fini, dans un tems t, fini, & qu'ainſi en exprimant ces deux forces par l'eſpace D, qu'elles feroient enſemble parcourir au corps, en ſuppoſant qu'elles agiroient du même côté, cet eſpace D, ſera toujours fini. On pourra donc déterminer ſur une ligne finie, un eſpace AB, que les deux forces enſemble feroient parcourir au corps, dans un tems fini t: & ſi cette ligne paſſe par le centre F, de peſanteur du corps, elle ſera toujours l'axe de la courbe que ce corps décrira, ce qui eſt évident, puiſque la force centrifuge f, feroit parcourir au corps l'eſpace FB, dans le même tems que la force centripète P, lui feroit décrire l'intervalle AF; car les deux forces enſemble ſont ſuppoſées faire parcourir dans un tems t,

tout l'eſpace *AB*; & la force centripète *P*, feroit ſeule parcourir de l'eſpace total *AB* ; la partie *AF*, de cet eſpace qui ſépareroit le corps de ſon centre *F*, de peſanteur, tandis que la force centrifuge lui feroit décrire, dans le même tems, l'eſpace *FC*, qui éloigneroit le corps de ce même centre.

Donc la ligne finie *AB*, ſera l'axe de la courbe que le corps décrira, & cet axe étant fini, la courbe décrite ne pourra être qu'une courbe rentrante en elle-même ; un cercle, dans le cas où les deux forces *AF*, *FC*, feroient égales, & une ellipſe, plus ou moins excentrique, dans le cas de l'inégalité des deux forces.

Obſervons encore que cette ellipſe ne pourra être décrite que par l'un de ſes foyers, attendu l'équation, $r = D - R$ qui réſulte de la loi de la conſtance de la ſomme des forces centrales, qui exige que le centre de peſanteur du corps ſoit ſitué dans un point tel que la ſomme $r + R$, des rayons vecteurs, repréſentant la ſomme des forces, ſoit toujours égale à l'axe principal *D*, de la courbe ; & qu'ainſi le cas d'une ellipſe décrite par ſon centre, dont a parlé M. Newton, eſt purement chimérique, ainſi que celui d'un cercle

décrit de tout autre point que de ſon centre ; car l'équation $r=D-R$, dans le cas d'un cercle décrit, ſe réduit à $2r=D$, & à $r=\frac{D}{2}$, à cauſe de l'égalité des rayons vecteurs $R+r$; puiſque dans le cas où ces rayons ne ſeroient pas égaux, l'équation $r=D-R$ ſeroit à l'ellipſe, décrite par l'un de ſes foyers, & nullement au cercle.

Il eſt donc inconteſtablement démontré que toutes les courbes qu'il eſt poſſible qu'un corps décrive, autour d'un ſeul & même point fixe, ſe réduiſent au cercle décrit par ſon centre, & à l'ellipſe décrite par l'un de ſes foyers ; & que la génération de toute autre eſpece de courbes eſt chimérique, fauſſe & abſurde, ainſi que les loix d'où on les déduit. L'équation, à toutes les courbes poſſibles qu'un corps pourroit décrire autour d'un point, étant, comme il vient d'être démontré, $r=D-R$. Dans le cas de la parabole, par exemple, l'on auroit : $R+r=D$, qui ſe réduiroit à $R=D$, à cauſe que le rayon vecteur r, terminé au premier foyer de la parabole, ſeroit nul à l'égard du rayon vecteur R, qui ſe termineroit au ſecond foyer, infiniment diſtant du premier.

Par conséquent la tendance du corps ne seroit point au premier foyer de la parabole, comme M. Newton a supposé qu'il pouvoit arriver, mais au second foyer, infiniment distant du corps.

Voilà donc une foule de démonstrations différentes qui concourent toutes à établir les mêmes vérités.

L'expression de la force accélératrice dans l'ellipse étant : $\frac{c^2}{2r} \pm R \mp r$, ainsi qu'il a été prouvé, suivant que cette force seroit considérée dans le tems où le rayon vecteur R, croîtroit, ou décroîtroit ; il s'ensuit que l'effet de la force de projection sur le corps, quand l'angle formé par les directions des deux forces seroit aigu, seroit toujours $R - r$, ou $-R + r$, quand cet angle seroit obtus, comme dans le retour du corps au point du départ. Le reste de la force, exprimé par $\frac{c^2}{2r}$, marque toujours l'espace que la force accélératrice feroit décrire au corps, dans le cas où il parcourroit un cercle au point où il se trouve.



NEUVIEME OBSERVATION.

Sur la génération du Mouvement parabolique.

Si un corps A, peſant ſur un centre T, de peſanteur, infiniment éloigné, eſt frappé par une force ABC (*Fig.* 19), perpendiculaire à celle de la gravité du corps, ce corps, par ces forces combinées, décrira la parabole ADE.

Car nommons $AB = MD\,(y)$, $AC = NE\,(Y)$, $AM\,(x)$, $AN\,(X)$; & que le corps dans un tems t, employé à décrire l'eſpace AB, ſoit ſuppoſé tomber par le ſeul effet de la force accélératrice de la hauteur $BD = AM$, & dans un tems T, employé à décrire l'eſpace AC, de la hauteur $CE = AN$. Les eſpaces parcourus, étant comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'on aura; $x : X :: y^2 : Y^2$; c'eſt-à-dire, les abſciſſes, ou eſpaces parcourus AM, AN, comme les quarrés des ordonnées MD, NE. Donc le corps décrira, la parabole ADE.

Suppoſons actuellement que le corps décrive, par l'un de ſes foyers F, une ellip-

ſe dont le paramètre ſeroit p, & l'axe principal $2a$. L'équation à cette courbe ſeroit : $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$.

Or, dans le cas où l'on voudroit tranſformer ce mouvement elliptique autour de l'un des foyers F, de la courbe, en mouvement parabolique, autour du même foyer F, il eſt clair qu'il faudroit éloigner le foyer, ou centre de peſanteur F, du corps à l'infini, afin que l'équation $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, fût réduite à l'équation $y^2 = px$, qui eſt à la parabole, par la diſparition du terme $\frac{px^2}{2a}$, parce que quand le foyer F s'éloigne à l'infini, l'axe $2a = \infty$, & dès lors le terme $\frac{px^2}{2a}$, devient nul à l'égard de px. Il n'exiſte donc point d'autre moyen de faire décrire à un corps une parabole, autour de ſon centre F, de peſanteur, qu'en éloignant ce centre à l'infini. La génération de cette courbe, autour du premier foyer de la parabole, preſcrite par M. Newton, eſt donc fauſſe & abſurde, puiſque le corps y circuleroit autour d'un centre dont il ne ſeroit qu'à une diſtance finie, au lieu de ſe mouvoir autour d'un centre infiniment diſtant.

On doit obſerver que le cas dont il s'agit ici, du mouvement parabolique d'un corps, eſt purement métaphyſique; puiſque ce mouvement ne pourroit avoir lieu que dans le cas où le corps ſeroit ſuppoſé placé à une diſtance infinie de ſon centre de peſanteur, ce qui eſt une ſuppoſition au fond chimérique, & qui ne peut jamais avoir lieu. D'où il réſulte qu'un mobile ne peut jamais décrire, autour de ſon centre de peſanteur, qu'un cercle, ou une ellipſe, ainſi qu'il a été démontré; & que c'eſt par conſéquent à la génération de ces deux courbes que les loix des forces centrales doivent ſe réduire; en ſuppoſant néanmoins toujours que la force de la gravité ne retrancheroit jamais rien à l'action tangentielle; car dans le cas où l'action tangentielle iroit en diminuant, comme il arriveroit en effet, ainſi qu'on le prouvera bientôt, la courbe décrite, par un corps de dimenſions finies, qui ſeroit mû autour de ſon centre de peſanteur, ſans être ſoutenu, ne pourroit être qu'une ſpirale, puiſqu'il eſt évident que, dans ce cas, le mouvement du corps ſe termineroit au centre de tendance.



EXAMEN critique du jugement de l'Académie Royale des Sciences, ſur quatre propoſitions ſur les Loix des Forces centrales, ſoumiſes au jugement de cette Académie, par l'Auteur des préſentes Obſervations.

DANS le deſſein d'engager les Géomètres à porter la théorie des loix des forces centrales au même degré de certitude & d'évidence que les autres parties des Mathématiques, & d'en écarter tout ce qui y avoit été introduit d'inexact & de défectueux, l'Auteur de cet Ouvrage a cru qu'un moyen d'y parvenir, étoit de ſoumettre au jugement de l'Académie Royale des Sciences pluſieurs queſtions ſur cette partie importante des Mathématiques, qu'il a même fini par réduire à quatre propoſitions fondamentales qui lui ont paru les plus exactes, & ſuſceptibles d'une démonſtration plus rigoureuſe. L'Académie lui a nommé d'abord pour Commiſſaires MM. Bézout, & du Séjour, auxquels elle a joint par la ſuite MM.

de Condorcet & de Vandermonde. Ces Meſſieurs ont fait deux rapports, adoptés par l'Académie, & ce ſont ces deux rapports qu'on s'eſt propoſé de diſcuter ici.

La premiere propoſition qui a été préſentée à l'Académie a deux objets : le premier, de déterminer la meſure de la force accélératrice d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, conſidéré en même tems, comme le centre de peſanteur du corps. L'Auteur a prétendu qu'en nommant r, le rayon du cercle décrit ; C, l'arc quelconque fini, ou infiniment petit, décrit dans un tems t ; la meſure, ou hauteur dont la force accélératrice feroit tomber le corps, pendant le tems t, employé à décrire l'arc C, étoit toujours $\frac{c^2}{2r}$, ou le quarré de l'arc décrit, diviſé par le diamètre du cercle parcouru : voilà le premier objet de la propoſition.

Le ſecond objet de cette propoſition a été de déterminer la meſure de la ſomme des efforts, conſiderés dans la circonférence du cercle parcouru, que doit faire le corps, dans le même tems t, employé à décrire l'arc C, pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il auroit tendu à parcourir en décrivant

cet arc; en ſuppoſant que la ſomme de ces efforts auroit été employée à lui faire décrire un eſpace; & l'Auteur a prétendu que ſi le corps avoit en effet employé à décrire un eſpace, tout l'effort qu'il auroit fait pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il auroit tendu à parcourir, en décrivant l'arc C, & pendant le tems t; cet eſpace, à la fin du même tems t, ſeroit toujours $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$, & que c'étoit, par conſéquent par cet eſpace, & non par l'eſpace $\frac{c^2}{2r}$, qu'il falloit meſurer la force de la peſanteur du corps, c'eſt-à-dire, cette force qui retiroit à tout inſtant le mobile de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendoit à parcourir, & qui faiſoit replier ces tangentes ſur la circonférence du cercle décrit.

L'Auteur ayant démontré en toute rigueur la légitimité de la meſure $\frac{c^2}{2r}$, de la force accélératrice, & la légitimité de la meſure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$, de la peſanteur proprement dite, dans ſes cinquième & ſixième Obſervations; n'a rien a ajouter à ce qu'il en a dit. Il lui ſuffira donc d'exa-

miner ſi le rapport des Commiſſaires de l'Académie eſt bien conforme à l'eſprit de ces démonſtrations.

Sur la premiere partie de cette propoſition, l'avis des Commiſſaires a été d'attribuer deux meſures à la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle; ſavoir $\frac{c^2}{2r}$, lorſque le cercle ſeroit *conſidéré comme courbe rigoureuſe*, & $\frac{c^2}{r}$, lorſqu'on l'enviſageroit comme *courbe poligone*; c'eſt-à-dire, comme poligone d'une infinité de côtés infiniment petits. *Ces deux meſures*, diſent-ils, *ſont également légitimes*, & *l'une n'exclut point l'autre.* L'idée de ces deux meſures, qui different de moitié, donnée à la même force, a été ſuggérée à Meſſieurs les Commiſſaires, par le deſir très-louable de concilier les deux opinions qui s'étoient élevées parmi les Géomètres, au ſujet de la meſure de la force centrale du cercle; les uns ayant prétendu que cette meſure étoit $\frac{c^2}{2r}$, & les autres $\frac{c^2}{r}$, ce qui fait une différence de moitié. Pour parvenir donc à opérer une conciliation ſi deſirable, Meſſieurs les Commiſſaires ont été obligés de créer un ſyſtême;

ſavoir, *que les Géomètres avoient toujours éte d'accord ſur cet objet*, en adoptant les deux meſures attribuées à la force centrale du cercle, ſuivant qu'il ſeroit conſidéré comme courbe rigoureuſe, ou comme poligone d'une infinité de côtés. Et l'Auteur des propoſitions prétend que la meſure $\frac{c^2}{r}$, attribuée à la force centrale du cercle, ne réſulte pas de ce que le cercle ſeroit conſidéré comme poligone; que dans ce cas, comme dans celui où il ſeroit regardé comme courbe rigoureuſe, la meſure de la force accélératrice étoit toujours dans le cercle $\frac{c^2}{2r}$, mais que cette meſure dérivoit uniquement de la conſidération de l'effet ou de la vîteſſe que la force accélératrice auroit produit ſur le corps, à la fin d'un tems $t = 1$, par lequel le corps pourroit parcourir uniformément un eſpace double dans le même tems; effet par lequel la force étoit repréſentée, par ceux des Géomètres qui aſſignoient $\frac{c^2}{r}$ pour meſure de la force; au lieu que ceux qui ne lui donnoient pour meſure que $\frac{c^2}{2r}$, n'exprimoient cette force que par la moitié de la vîteſſe acquiſe à la fin du même tems $t = 1$.

Pour prouver la vérité de cette propoſition, il ſuffit de tranſcrire quelques lignes de la lettre même que M. Bézout écrivit à l'Auteur, le 4 Juillet 1772.

« Les Géomètres, dit-il, ſont dans l'u-
» ſage très-permis de meſurer l'intenſité
» de la force centrale *par la vîteſſe qu'elle*
» *peut faire naître dans le mobile, pendant*
» *la portion de tems qu'on eſt convenu de*
» *prendre pour unité.* Si donc h, eſt la hau-
» teur dont la force centrale peut faire deſ-
» cendre un mobile, pendant cette unité
» de tems, 2 h *ſera l'eſpace qu'il ſeroit ca-*
» *pable de décrire uniformément, pendant*
» *cette même unité de tems ;* & $\frac{2h}{1}$ *ſera par*
» *conſéquent la vîteſſe qu'aura engendrée la*
» *force centrale.* Ce ſera ce *que les Géomè-*
» *tres prennent pour meſure de la force cen-*
» *trale.* Ainſi en nommant f, cette meſure,
» on aura $f = \frac{2h}{1} = 2h$; ſubſtituez, dans
» cette équation, au lieu de h, la valeur
» que vous lui ſuppoſez, & *que tous les*
» *Géomètres lui ont toujours ſuppoſée ;*
» c'eſt-à-dire, $\frac{c^2}{2r} = h$, & vous aurez $f =$
» $\frac{cc}{r}$. Vous voyez, qu'en partant de vos
» principes, $\frac{c^2}{r}$, eſt en effet la meſure de la

» force centrale, lorſque l'on convient de » *meſurer cette force par la vîteſſe qu'elle eſt* » *capable d'engendrer dans un tems donné* ».

Rien de plus clair que cette lettre de M. Bézout; il ſuppoſe d'abord que h, eſt la hauteur dont la force centrale auroit fait deſcendre un mobile pendant un tems $t = 1$; & c'eſt précisément par cette hauteur, ou eſpace parcouru h, dans ce même tems $t = 1$, que ceux des Géomètres qui donnent pour meſure à la force $\frac{c^2}{2r} = h$, expriment cette meſure; tandis que les autres Géomètres lui donnent pour meſure le double de cet eſpace ou $\frac{c^2}{r} = 2h$, qui eſt en effet non l'eſpace que le corps auroit réellement parcouru dans le tems $t = 1$, en vertu de l'action de la force ſur le corps, pendant le même tems; mais ſeulement celui qu'elle auroit rendu *capable de décrire uniformément* pendant le même tems $t = 1$, & ſeulement à la fin de ce tems, & pendant le cours du tems ſuivant; enſorte que c'eſt toujours par un eſpace décrit dans un tems $t = 1$, que la force eſt meſurée; mais quand cet eſpace eſt $h = \frac{c^2}{2r}$, il eſt évident qu'il eſt la véritable meſure de la force accélératrice,

qui étant réduite à un mouvement uniforme, ſuivant l'eſprit de la premiere obſervation, ſeroit égale au produit de la moitié $\frac{v}{2}$, de la vîteſſe acquiſe, à la fin du tems $t = 1$, par ce même tems. Ainſi $\frac{v}{2} \times 1, = \frac{v}{2}, = h$, ſera la véritable meſure de la force centrale accélératrice, ou de la force uniforme qui auroit produit le même effet, pendant le même tems, & qui par conſéquent ſeroit égale à la premiere.

Si au contraire la meſure de la force eſt $2h = \frac{c^2}{r}$, il eſt évident qu'on double l'effet produit $h = \frac{c^2}{2r}$; puiſqu'effectivement l'effet produit ſur le corps, pendant le cours du tems $t = 1$, n'eſt pas $2h = \frac{c^2}{r}$, mais $h = \frac{c^2}{2r}$. L'effet $2h = \frac{c^2}{r}$, n'eſt que l'effet que produiroit dans un ſecond tems $t = 1$, une ſomme de vîteſſes que le mobile auroit acquiſe à la fin du premier tems égal, en ſuppoſant encore que le corps ſeroit mû, pendant le ſecond tems, avec cette même ſomme de vîteſſes acquiſe à la fin du premier tems. La force n'eſt donc pas exactement meſurée par $\frac{c^2}{r} = 2h$, puiſ-

qu'elle eſt meſurée, non pas par un effet produit pendant le cours du premier tems, durant lequel ſon action ſur le corps ſeroit conſiderée, mais par un effet à produire dans le ſecond tems, avec une ſomme de vîteſſes acquiſes à la fin du premier tems.

Voilà la véritable origine des deux meſures données à la même force, qui n'a abſolument rien de commun avec cette autre idée que préſente M. Bézout, dans ſa même lettre, du 4 Juillet, touchant la légitimité de ces deux meſures dans le cercle, ſuivant qu'il ſeroit regardé comme courbe rigoureuſe, ou comme courbe poligone, & qu'il a cru devoir appuyer ſur une démonſtration particulière que nous allons examiner.

«Les Géomètres ſont également fon-
» dés, & également d'accord avec vos
» principes, ajoute-t-il, dans l'application
» qu'ils font de cette meſure des forces
» centrales, aux mouvemens en ligne cour-
» be. Si l'on avoit une méthode de calcul
» qui permît de conſidérer les courbes,
» comme courbes rigoureuſes; il n'y a pas
» de doute que le petit eſpace *bd* (la flèche)
» (*Fig*.20), dont le mobile eſt ramené à cha-
» que inſtant, ne dût être meſuré dans le

» cercle,

» cercle, par $\frac{c^2}{2r}$; mais dans le cas où *l'on*
» *considère la courbe comme un poligone*
» *d'une infinité de côtés, on se tromperoit*
» *beaucoup si on mesuroit ainsi la quantité*
» *dont le mobile est ramené à chaque ins-*
» *tant.* En effet, dans cette hypothèse, le
» corps qui vient de décrire le petit côté
» *ea*, tend à décrire la petite ligne *ab*=*ea*,
» pendant un instant égal; puis donc qu'il
» doit arriver en *d*, la force centrale a
» dû le ramener de la quantité *bd*; mais
» remarquez que cette quantité *bd*, ne
» doit pas être regardée comme décrite
» d'un mouvement accéléré, comme dans
» la courbe rigoureuse. Dès que vous re-
» gardez la courbe comme poligone, vous
» imposez la condition que la force cen-
» trale n'agit qu'à chaque angle du poli-
» gone, & par une impulsion unique.
» Qu'elle y donne toute la vîtesse que
» dans la courbe rigoureuse, elle eût don-
» née successivement, pendant le tems
» qu'il a fallu pour décrire le petit côté
» *ea*. Or, dans cette supposition, l'espace
» qu'elle fera décrire doit être double de
» celui qui eût été décrit par l'accéléra-
» tion successive. Donc, pour que la me-
» sure que l'on prend ici pour l'effet de

» la force centrale ſoit exacte, il faut que
» *b d*, ſoit le double de ce que cette force
» auroit fait décrire en pareil tems ſur la
» courbe rigoureuſe. Or, ſi vous regar-
» dez le corps comme mû dans la cour-
» be rigoureuſe, & qu'au point, *a*, vous
» imaginiez la tangente *a q*; *q d* ſera la pe-
» tite quantité dont le corps auroit été
» ramené par l'effet ſucceſſif de la force
» centrale. Mais vous ſavez que par la na-
» ture du cercle, *b d* eſt double de *q d*;
» vous voyez donc qu'en meſurant la for-
» ce centrale par *b d*, lorſque la courbe
» eſt regardée comme poligone, on fait
» abſolument la même choſe que ſi on la
» meſuroit par *q d*, en conſidérant la cour-
» be comme rigoureuſe, & vous voyez
» en même tems que les Géomètres ne
» pourroient, dans ce même cas, prendre
» *q d*, pour meſure de la force centrale,
» ſans ſe contredire, puiſque par-là ils
» regarderoient comme continue une ac-
» tion qu'ils ont ſuppoſée interrompue à
» des diſtances infiniment petites ».

« Comme nous ſommes convaincus que
» ces raiſonnemens ſatisfont pleinement aux
» difficultés que vous vous êtes faites ſur
» cette matiere & aux différens argumens
» que vous avez expoſés dans vos deux

» lettres, nous ne les détaillerons pas da-
» vantage. Nous espérons que vous juge-
» rez, ainsi que nous, que tout est d'ac-
» cord entre l'estimation que vous faites
» avec tous les Géomètres, de la hauteur
» que la force centrale peut faire décrire
» dans un tems donné, & la mesure que
» les Géomètres prennent pour la force
» centrale. C'est le jugement que nous
» croyons devoir proposer à l'Académie,
» si après la lecture de cette lettre, vous
» desirez que le rapport en soit fait à cette
» Compagnie ».

L'Auteur des propositions, sur la simple lecture de cette lettre de M. Bézout, jugea que les raisonnemens qu'elle contient ne pouvoient aboutir qu'à un paralogisme, fondé sur cet argument aussi simple qu'exact. Le cercle étant toujours la même courbe, soit qu'on le considére comme poligone, ou comme courbe rigoureuse, il en résulte incontestablement que la force centrale du corps qui seroit supposé le décrire, doit être la même. Et bien loin que ce soit là le sentiment des Géomètres, comme M. Bézout veut le faire entendre, c'est qu'au contraire tous ceux à qui on en a parlé ont rejetté cette idée, qu'on ne trouve d'ailleurs dans au-

cun Auteur connu; ainſi cette aſſertion de M. Bézout, *que dans le cas où l'on conſidere la courbe comme un poligone d'une infinité de côtés, on ſe tromperoit beaucoup ſi on meſuroit par* bd, *la quantité dont le mobile eſt ramené à chaque inſtant*, ne peut être exacte; car en ſe prêtant même à l'hypothèſe de la deſcription du cercle, conſidéré comme poligone d'une infinité de côtés, laquelle ne peut être admiſe, comme on le verra par la ſuite, lorſqu'il s'agit de la deſcription réelle & phyſique de cette courbe par un corps de dimenſions finies, il doit s'enſuivre toujours que ſi *bd*, eſt la meſure de la force quand le corps eſt ſuppoſé décrire la courbe rigoureuſe, cette quantité ſera également ſa meſure quand il décrira la même courbe, conſidérée comme poligone. Il eſt étonnant qu'un Géomètre de l'ordre de M. Bézout, ait pu tomber ici dans une ſemblable mépriſe, & plus étonnant encore qu'il ait perſiſté dans un paralogiſme, dans lequel l'Auteur des propoſitions, par pluſieurs de ſes lettres, lui a démontré qu'il tomboit; ce paralogiſme ſe trouve, 1°, dans la ſuppoſition même que fait M. Bézout, des deux quantités différentes *bd*, *qd*, dont il prétend que le corps ſeroit

ramené, dans le cours d'un même tems $\dot{t}$, en décrivant la même courbe ſous les deux dénominations de courbe rigoureuſe, & de courbe poligone ; comme ſi ces dénominations pouvoient rien changer à la nature des choſes. 2°. A ne pas tenir compte du nombre double d'impulſions que le corps doit néceſſairement recevoir, dans le cours d'un même tems $\dot{t}$, en parcourant la courbe, conſidérée comme rigoureuſe, de celui qu'il recevroit dans le même tems, dans la courbe regardée comme poligone. Et en effet, puiſque, ſuivant M. Bézout même, la *ſuppoſition de la courbe poligone impoſe la condition que la force centrale n'agit qu'à chaque angle du poligone, & par une impulſion unique. . . . . que ſon action eſt interrompue à des diſtances infiniment petites*, & pendant tout le tems que le corps décriroit chaque côté du poligone ; y ayant donc autant de côtés que d'angles dans ce poligone ; c'eſt-à-dire, autant de parties où la force agiroit, que de parties où elle n'agiroit pas. La force agiroit donc moitié moins ſouvent dans le cercle, conſidéré comme poligone, qu'elle ne feroit dans le cercle, conſidéré comme courbe rigoureuſe. Le corps en

parcourant le cercle, considéré comme courbe rigoureuse, recevroit donc dans le cours d'un même tems t, un nombre n, d'impulsions, double de celui qu'il recevroit, dans le même tems, en décrivant la même courbe considérée comme poligone. Mais la force de chaque impulsion, dans ce dernier cas de la courbe poligone, étant double, suivant la proposition même de M. Bézout, de la force de celles que le corps recevroit dans la courbe rigoureuse, puisqu'elle imprimeroit une vîtesse double; il en résulte bien précisément que dans le cours d'un même tems t, fini, ou infiniment petit, le corps doit parcourir le même espace, soit dans la courbe poligone, soit dans la courbe rigoureuse; car nommant p, la force des impulsions, dans la courbe rigoureuse; n, leur nombre dans le cours d'un tems t: la force imprimée au corps, pendant ce tems, seroit np, & dans la courbe poligone la force imprimée dans le même tems, seroit $2p \times \frac{n}{2} = np$. Ainsi la force imprimée, dans le même tems, étant la même dans la courbe poligone, & dans la courbe rigoureuse, il s'ensuit démonstrativement que ce sera par la même quan-

tité *bd*, qu'il faudra l'exprimer dans ces deux cas.

Le paralogiſme de la propoſition de M. Bézout, que tout Géomètre appercevra par ſon ſeul énoncé, eſt donc rendu évident.

M. Bézout, à qui ce paralogiſme avoit été reproché, avoit gardé le ſilence pendant quelque tems. Mais l'Auteur des propoſitions ayant encore inſiſté ſur cette démonſtration, M. Bézout lui écrivit le 13 Juillet, en ces termes : « Vous revenez » encore, Monſieur, dans votre derniere » lettre, ſur une idée que nous jugeons » n'être nullement exacte, & ſur laquelle » *nous n'avions gardé le ſilence* que pour » éviter *la diſcution inutile* dont il s'agit. » Vous penſez que dans la courbe poligo- » ne, la force centrale agit moitié moins » ſouvent que dans la courbe rigoureuſe ; » & il paroît que c'eſt par cette eſtima- » tion que vous vous êtes enfin rapproché » des Géomètres, *ſur la meſure de la for-* » *ce centrale dans la courbe poligone.* Nous » ne pouvons vous diſſimuler que le motif » de votre acceſſion, au ſentiment des Géo- » mètres, ne ſeroit point avoué par aucun » d'entr'eux ».

Voilà comment M. Bézout s'eſt juſtifié

du paralogiſme qui lui étoit reproché ; & comment il s'en juſtifie encore dans ſon rapport à l'Académie, où il ne néglige pas de faire ſonner aſſez haut une contradiction auſſi légère que de courte durée, que le deſir très-vif de ſe rapprocher de ſon ſentiment, & ſa propoſition même avoient occaſionnée. L'Auteur avoit penſé que la propoſition que M. Bézout lui avoit adreſſée étoit au moins exacte à quelques égards, & qu'il pouvoit être vrai qu'au premier inſtant du mouvement, la force centrale, conſidérée dans la courbe poligone, pût être exprimée par bd, & par qd, lorſqu'on l'envisageroit dans la courbe rigoureuſe ; & en conſéquence il avoit très-mal à propos, accordé à M. Bézout, ſur la foi de ſa propoſition même, que l'on pouvoit, relativement à cet inſtant ſeulement, & nullement dans une ſomme d'inſtans, exprimer la force centrale dans la courbe rigoureuſe, par $qd = \frac{c^2}{2r}$, & dans la courbe poligone, par le double $bd = \frac{c^2}{r}$. Mais il avoit toujours ſoutenu qu'à la fin du tems, l'eſpace parcouru, dans les deux ſuppoſitions, devoit être égal, ce qui ramenoit toujours la meſure $\frac{c^2}{2r}$, pour l'unique

mesure donnée à la force dans ces deux même cas.

Il est assez singulier que M. Bézout affecte de relever une contradiction qui n'en est point une dans le fond, & qu'il auroit lui-même occasionnée. En examinant de plus près sa propòsition, l'Auteur s'est apperçu qu'elle manquoit de justesse à toutes sortes d'égards, & qu'il avoit eu tort d'accorder à M. Bézout, le peu même qu'il lui avoit accordé. En effet, il a trouvé que la tangente à mener au cercle devoit être tirée du point *b*, & non du point *q*, milieu de *b d*; & que par conséquent le mobile devoit être ramené de la même quantité *b d*, soit dans la courbe rigoureuse, soit dans la courbe poligone, comme cela devoit être en effet.

Qu'un mobile en *e*, soit supposé parcourir le côté infiniment petit *e a*, du poligone circulaire; ce corps, en pareil tems, décriroit la petite droite $a b = e a$: menant du point *b*, & par le centre *c*, la secante *bdQ*, sa partie extérieure *b d*, exprimera la quantité dont le mobile se seroit écarté du centre ou la force centrifuge du corps.

Soit conçue une tangente *b g*, menée du point *b*; la petite ligne *b d*, sera éga-

lement la quantité dont le mobile s'écarteroit du centre, si, au lieu de parcourir la droite ob, il décrivoit la tangente gb, qui lui est sensiblement égale, à raison de l'infinie petitesse de l'angle obg qui permet de considérer le triangle ogb, comme un triangle rectangle sensiblement isoscelle, & par conséquent les deux côtés ob, gb, comme sensiblement égaux. Ainsi le corps parcourant avec la même vîtesse les droites égales ob, gb, arriveroit au même instant au point b, & s'écarteroit du centre, par ces deux routes, de la même quantité db; c'est-à-dire, que sa force centrifuge seroit exactement la même, soit qu'il fût supposé décrire, dans la courbe rigoureuse, la tangente gb; ou la droite égale ob, dans la courbe poligone. Or le mobile devant être ramené par la force centrale, de la même quantité bd, dans la courbe rigoureuse, & dans la courbe poligone; il s'ensuit que bd, sera la mesure unique de la force centrale dans ces deux hypothèses, & que par conséquent qd, ne sera point la mesure de cette force, dans le cas de la courbe rigoureuse, comme M. Bézout le prétend. Et en effet, $bd = \frac{bg \times bg}{2dc} = \frac{2ea \times ea}{2dc}$

$= \frac{ea \times ea}{dc}$, égalité qui démontre que l'on a deux manieres d'exprimer la force centrale d'un corps qui feroit fuppofé décrire l'arc gd; favoir, $\frac{bg \times bg}{2dc}$, & $\frac{ea \times ea}{dc}$, parce que, dans ce cas particulier, la tangente gb, eft moyenne proportionnelle entre le côté infiniment petit ea, du poligone infini-latéral, & le double eb, de ce même côté; puifqu'en effet, $\overline{gb}^2 = 2\overline{ea}^2$. D'où fuit l'analogie : $ea : gb :: gb : 2ea$.

Si l'on fubftitue actuellement l'arc gd, à fa tangente gb, & l'arc ega, à fa corde ea, ce qui eft permis, lorfque ces arcs font fuppofés infiniment petits; & fi l'on nomme c, l'arc gd, & a, l'arc ea, l'on aura l'analogie $a : c :: c : 2a$. D'où fuivroit l'égalité $2a^2 = c^2$, & cette autre égalité : $\frac{c^2}{2r} = \frac{2a^2}{2r} = \frac{a^2}{r} = bd$, ce qui démontre que la flèche bd, eft la mefure unique de la force centrale du corps, foit que cette flèche ou mefure foit déterminée par le quarré de l'arc ea, divifé par le rayon, ou par le quarré de l'arc gd, divifé par le diamètre; & foit que le corps foit fuppofé parcourir le poligone infini-

latéral ea, ou la courbe rigoureuſe gb, ou gd.

Nombre de Géomètres ont été induits en erreur, par l'expreſſion ci-deſſus $\frac{a^2}{r}$ de la force centrale du cercle. Ils en ont conclu que la meſure de cette force étoit toujours, & dans tous les cas, le quarré de l'arc décrit, diviſé par le rayon, & non par le diamètre du cercle parcouru. Ils n'ont pas fait attention que cette expreſſion $\frac{a^2}{r}$ étoit égale à $\frac{c^2}{2r}$, & n'exprimoit pas la hauteur dont le mobile tomberoit pendant le tems t, employé à décrire la corde ea, ou l'arc ega; mais celle dont il ſeroit abaiſſé, dans un tems plus long T, employé à décrire la tangente gb, ou arc plus grands gd; enſorte que c'eſt la flèche bd, relative à la génération de l'arc gd, & au tems employé à le décrire, qui ſe trouve avoir ici deux expreſſions différentes qui ont la même valeur, $\frac{a^2}{r}$, & $\frac{c^2}{2r}$; ce qui veut dire, que ſi le mobile tomboit pendant tout le tems T, employé à décrire l'arc gd, la hauteur dont il ſeroit abaiſſé, ſeroit ou $\frac{a^2}{r}$, ou $\frac{c^2}{2r}$, qui ſont deux quantités égales dans ce cas, & les ex-

preſſions de la même flèche *bd* : mais ſi le mobile tomboit pendant tout le tems plus court *t*, employé à décrire l'arc moindre *ega*, il eſt évident qu'il tomberoit d'une hauteur moindre que la flèche $bd = \frac{a^2}{r} = \frac{c^2}{2r}$; & que par conſéquent, cette flèche ne peut être la meſure de la hauteur dont le mobile tomberoit dans le tems *t*, employé à décrire l'arc *ega*; ceci eſt de la plus grande évidence. Il eſt d'abord inconteſtable que la flèche *bd*, eſt la hauteur dont la force centrale feroit tomber le corps pendant le cours du tems *T*, employé à décrire l'arc *gd*. Donc cette même flèche ne peut être en même tems la hauteur dont la même force feroit tomber le corps pendant le tems plus court *t*, employé à décrire l'arc moindre *ega*. Ainſi la flèche *bd*, ne doit être conſidérée comme meſure de la force centrale du corps, qu'autant que ce corps ſeroit ſuppoſé décrire un arc *gd*, dans un tems *T*, & non point un arc moindre *ega*, dans un tems plus court *t*. D'où il ſuit que l'expreſſion réelle de la force accélératrice eſt toujours, dans le cercle, $\frac{c^2}{2r}$; & que quand on trouve pour expreſſion de la force, $\frac{a^2}{r}$, cette expreſſion, comme dans le cas

préſent, marque toujours que la hauteur exprimée par $\frac{a^2}{r}$, eſt relative, non pas à la génération de l'arc a, ni au tems employé à le décrire, mais à la génération d'un autre arc c, & au tems employé à le parcourir; cet arc c, étant toujours moyen proportionnel entre l'arc a, & ſon double $2a$.

M. Bézout ſuppoſe encore très-gratuitement que les Géomètres ont toujours été d'accord ſur la meſure de la force centrale du cercle, même quand les uns l'exprimoient par $\frac{c^2}{2r}$, & les autres par $\frac{c^2}{r}$. Suivant lui, c'étoit la meſure de la force, conſidérée dans la courbe rigoureuſe, qu'ils avoient tous voulu exprimer par $\frac{c^2}{2r}$, & la meſure $\frac{c^2}{r}$ de la même force qu'ils avoient également tous en vue d'exprimer dans la courbe poligone; enſorte qu'il ſuivroit de ce ſyſtême que le centre de réunion de tous les Géomètres ſeroit le paralogiſme même de cette propoſition de M. Bézout.

On ne veut citer à M. Bézout que deux traits, conſignés dans des lettres, écrites par des Géomètres de ſon rang;

c'eſt-à-dire, par des Géomètres du premier ordre au ſujet de la queſtion préſente : l'un adreſſant à l'Auteur la propoſition même qu'on vient de diſcuter, termine ſa lettre par ces paroles : « Vous voyez que l'effet de la force centrale eſt » proportionnel au quarré de la vîteſſe, » diviſé par le rayon, & *non point par le* » *diamètre, comme on le trouve dans plu-* » *ſieurs ouvrages* ».

Voilà donc une excluſion formelle donnée à la meſure $\frac{c^2}{2r}$, & cette meſure même de la force préſentée comme erronée. L'autre Géomètre écrivoit en ces termes :

« J'ai prouvé que c'eſt avec raiſon, que » Newton prend pour valeur de la force » centrifuge le *quarré de la vîteſſe diviſé par* » *le rayon, au lieu de diviſer par le dia-* » *mètre. J'avois fait moi-même cette der-* » *nière faute*, dans le Mémoire qui a été » imprimé dans les tranſactions philoſophi- » ques, étant dans l'uſage de me ſervir » alors de la méthode des infiniment petits, » & de ſuivre les formules du Marquis de » l'Hôpital. Je m'apperçus tout de ſuite » *de cette faute*, & je la corrigeai dans le » Mémoire que j'envoyai peu de tems » après à l'Académie des Sciences. *Cette*

» *faute* avoit embarrassé pendant long-
» tems M. Simpson, grand Géomètre An-
» glois, qui n'avoit pas eu connoissance
» de mon nouveau Mémoire. Il y travail-
» la très-long tems, & enfin il vint à bout
» de la découvrir; ainsi qu'on peut le voir
» dans ses ouvrages ».

Voilà encore une nouvelle exclusion bien formelle donnée à la mesure $\frac{c^2}{2r}$. Où est donc cet accord, dont parle M. Bézout, d'employer $\frac{c^2}{2r}$ pour mesure de la force, dans la courbe considérée comme rigoureuse, & $\frac{c^2}{r}$, quand la courbe étoit considérée comme poligone? L'Auteur de cette derniere lettre, va même bien plus loin; instruit des questions qui avoient été agitées à l'Académie Royale des Sciences, au sujet de ces mesures, il marque : *ne croyez pas non plus que l'expression du quarré de l'arc divisé par le diamètre, ni par le rayon* « puisse représenter la somme des
» forces centrales, pendant le tems que
» le corps décrit cet arc; puisque la somme
» de ces forces est comme le tems, ou
» comme l'arc, & nullement comme le
» quarré de l'arc ».

Et en effet, ce Géomètre, l'un de ceux qui

qui a le plus étudié la matiere des forces centrales, conſidére ici la force de la peſanteur en ſoi, & par la ſomme des efforts que le corps fait dans une ſomme de momens, pour ſe retirer, en détruiſant toutes les forces centrifuges, de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendoit à parcourir; & dès-lors, l'expreſſion de la force, comme il a été démontré, n'eſt plus ni $\frac{c^2}{2r}$, ni $\frac{c^2}{r}$, nous verrons tout à l'heure que M. Bézout rejette encore cette idée dans ſon rapport, voulant toujours que l'effet de la force centrale ſoit $\frac{c^2}{2r}$, ou $\frac{c^2}{r}$; ſuivant que le corps décriroit la courbe rigoureuſe, ou la courbe poligone.

Le même Géomètre, dans une lettre poſtérieure, finit même par rejetter ces deux expreſſions de la meſure de la force par un autre motif : « Vous me faites tou-
» jours dire (dit-il) ce que je combats
» le plus ; que la force centrale eſt expri-
» mée par le quarré de l'arc, diviſé par le
» rayon, au lieu que c'eſt *le quarré du*
» *mouvement, ſuivant la tangente, diviſé*
» *par le rayon*, ce qui eſt bien différent ;
» puiſque l'arc eſt une quantité variable,

» pendant que le mouvement ſur l'arc eſt
» toujours le même ; c'eſt là ce qui fait que
» l'expreſſion de la force centrale eſt conſ-
» tante, ainſi que cette force.

Il paroît donc réſulter de cet expoſé, que c'eſt à tort que M. Bézout prétend que tous les Géomètres ſont d'accord ſur l'uſage qu'ils font des deux meſures $\frac{c^2}{2r}$, & $\frac{c^2}{r}$ de la force centrale dans le cercle, ſuivant que la courbe ſeroit regardée par eux comme rigoureuſe, ou comme poligone. A en juger même par les différentes idées que chacun ſe forme de cette force, on ne peut s'empêcher de conclure que ces idées ſont encore bien confuſes à cet égard, & que l'on doit ſavoir gré à ceux qui font des efforts pour y porter la clarté.

Comme les forces motrices ſont ordinairement repréſentées par les eſpaces qu'elles font parcourir aux corps, dans un tems donné ; l'on voit qu'en prenant pour meſure de la force centrale du cercle $\frac{c^2}{r}$, au lieu de $\frac{c^2}{2r}$, l'on peut être induit en erreur, en concluant de la meſure $\frac{c^2}{r}$, que ce ſeroit là la hauteur, dont la force feroit deſcendre le corps pendant le tems qu'il

auroit employé à décrire l'arc c; ce qui ſeroit faux, puiſque cette hauteur ou eſpace parcouru, étoit toujours $\frac{c^2}{2r}$; & c'eſt cependant dans ce ſens que la plupart des Géomètres qui ont employé cette meſure, ſemblent l'avoir entendu ; c'eſt-à-dire, au ſens que la hauteur dont la force feroit deſcendre le corps, dans le tems employé à décrire l'arc c, ſeroit en effet, $\frac{c^2}{r}$. L'eſpace exprimé par $\frac{c^2}{r}$, eſt celui que le corps décriroit uniformément avec la vîteſſe acquiſe, à la fin du tems employé à décrire l'arc c, & pendant le même tems, qui eſt toujours double de l'eſpace exprimé par $\frac{c^2}{2r}$, qui eſt l'eſpace réel que le corps auroit parcouru pendant le cours du même tems, d'un mouvement accéléré. Delà il ſuit qu'on peut exprimer la force centrale du cercle, par $\frac{c^2}{r}$; au ſens que $\frac{c^2}{r}$, exprimera l'eſpace double de celui que la même force feroit décrire, dans le même tems, d'un mouvement accéléré; ou ce qui revient au même, au ſens que la force ſeroit exprimée par la vîteſſe acquiſe, à la fin du même tems. On peut donc ad-

mettre, ſans inconvénient, les deux meſures $\frac{c^2}{2r}$, $\frac{c^2}{r}$ de la force centrale du cercle, pourvu qu'on l'entende comme il convient. Dans le premier cas, la force eſt repréſentée par l'eſpace réel qu'elle auroit fait parcourir au corps d'un mouvement accéléré; & dans le ſecond, par celui qu'elle lui feroit parcourir uniformément, avec la vîteſſe acquiſe, à la fin du tems employé à décrire le premier eſpace parcouru: & dès-lors cette ſeconde meſure de la force eſt néceſſairement double de la premiere, de quelque maniere même que le cercle ſoit conſidéré, comme courbe rigoureuſe, ou comme courbe poligone; car l'on ſent que cette différente dénomination du cercle, n'a rien de commun avec la meſure de la peſanteur.



Seconde Partie de la premiere Propoſition touchant la légitimité de la meſure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ *de la peſanteur.*

L'AVIS des Commiſſaires de l'Académie ſur cette meſure de la peſanteur, a été *quelle ne pouvoit être admiſe par les Géomètres*, & *que l'Auteur devoit être invité à retirer cette propoſition, comme contraire à des vérités démontrées* : ſur le ſeul fondement que l'effet de la force centrale étoit toujours, *ou une vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems, ou un objet quelconque proportionné à cet effet.* D'où *il ſuivoit toujours que la force centrale ne pouvoit avoir pour meſure que* $\frac{c^2}{r}$, *c'eſt-à-dire, le quarré de l'arc décrit, diviſé par le rayon.*

Cet avis eſt entiérement conforme à ce que M. Bézout avoit écrit à l'Auteur, le 13 Juillet 1772 : « Nous ne pouvons » vous accorder que la meſure de la force » centrale eſtimée par l'eſpace qu'elle fe» roit décrire uniformément, dit-il, pen» dant le tems qui a été employé à dé-

» crire l'arc c, ſoit $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$; car ſi vous en-
» tendez que cet eſpace eſt décrit avec
» la vîteſſe acquiſe par l'accélération qui
» a engendré la hauteur $\frac{c^2}{2r}$, alors il a pour
» meſure $\frac{c^2}{r}$; c'eſt-à-dire, le double; & ſi
» vous ne l'entendez pas ainſi, cet état
» d'uniformité eſt un être nouveau, mais
» qui certainement ne ſervira pas de meſu-
» re à la force centrale ».

Le Géomètre, dont on vient de parler, qui avoit été invité à la recherche du problême, touchant l'eſpace que décriroit un corps, s'il ne recevoit jamais de nouvelles impulſions de la force centrale, & par l'effet de la ſeule impulſion qui, dans l'état de repos, le feroit tendre au centre de peſanteur; écrivoit à l'Auteur, au ſujet de l'expreſſion $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$: « Vous intro-
» duiſez une nouvelle expreſſion qui peut,
» à la vérité, repréſenter la vîteſſe acquiſe
» au bout d'un tems donné, par une force
» qui agit uniformément, & ſuivant la
» même direction, ou ſuivant des direc-
» tions parallèles ».

On voit que ce Géomètre, auſſi ſage qu'éclairé, à qui on a même caché les rai-

ſons ſur leſqu'elles l'expreſſion $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$, eſt appuyée, dans l'eſpérance qu'en travaillant d'après lui-même, il rencontreroit la même expreſſion, ſe donne bien de garde de trancher, & de prononcer que cette expreſſion *ne pouvoit être admiſe par les Géomètres.* Il reconnoît au contraire que cette expreſſion *peut repréſenter la vîteſſe acquiſe au bout d'un tems donné, par une force qui*, comme celle de la peſanteur, *agit uniformément, & ſuivant la même direction, ou ſuivant des directions parallèles.*

La mépriſe dans laquelle tombent nos Géomètres dans leur rapport eſt facile à appercevoir. Ils confondent la force accélératrice avec la force de la peſanteur : la meſure de la force accélératrice eſt l'eſpace parcouru à la fin d'un tems donné, ou la moitié de la vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems $t = 1$, ainſi qu'il a été prouvé. Il eſt évident que pour avoir un effet de la force accélératrice, par lequel on puiſſe la repréſenter, c'eſt une néceſſité de laiſſer tomber un corps pendant un certain tems, & de meſurer les eſpaces que l'accélération lui auroit fait parcourir pendant ce tems. Ces eſpaces parcourus pour-

ront repréſenter la force accélératrice, pendant ce même tems; mais il n'en eſt pas de même de la peſanteur. Le corps peſe ſur ſon centre de peſanteur, dans ſon état de repos, & avant que de tomber : l'accélération qui naît de ſa chûte eſt donc abſolument étrangère à la peſanteur, & ne peut par conſéquent lui ſervir de meſure. De même que quand on peſe des corps dans la balance, on ne s'aviſe pas de meſurer leur peſanteur par les effets que produiroient ſur l'un des baſſins, ces corps qu'on y laiſſeroit tomber d'une certaine hauteur. Ces corps ſont peſés en repos, & la meſure de la peſanteur eſt l'effet produit dans cet état, & non point l'effet qui ſeroit produit par l'état d'accélération.

Ces idées, ſur la meſure de la peſanteur, ſont très-certainement auſſi ſimples qu'exactes, & on n'a rien omis pour les développer à M. Bézout; on lui a démontré de plus, comme on l'a fait dans la cinquième Obſervation, que l'effet produit par la peſanteur, dans l'état de repos, étoit toujours la racine quarrée de l'effet produit dans l'état d'accélération; que la meſure de la peſanteur des corps, proche la ſurface de la terre, n'étoit pas les quinze pieds d'eſpace qu'ils parcourent

dans la première ſeconde, que c'étoit là la meſure de la force accélératrice; mais $\sqrt{15^p}$ qui eſt l'eſpace que la peſanteur leur feroit parcourir, par l'effet de la force de cette ſeule impulſion centrale qui les fait tendre au centre de la terre dans leur état de repos. N'eſt-il pas étonnant d'entendre dire enſuite froidement à M. Bézout, dans ſon rapport : *que l'Auteur devoit être invité à retirer cette propoſition, comme contraire à des vérités démontrées, & qu'elle ne pouvoit être admiſe par les Géomètres.* Mais pour être en droit de parler de la ſorte, il faudroit avoir prouvé auparavant, ou que l'effet produit par la force, dans l'état de repos du corps, n'étoit pas l'effet de la peſanteur, ou que cet effet étoit mal exprimé, en l'exprimant par la racine quarrée de l'effet produit dans le même tems, dans l'état d'accélération. M. Bézout ne prouve ni l'une, ni l'autre de ces deux propoſitions, & porte néanmoins ſur la propoſition de l'Auteur, le même jugement préciſément que s'il les avoit prouvées. On n'eſt en droit de rejetter une propoſition, appuyée ſur une démonſtration, qu'autant que l'on renverſe la démonſtration. Tant que la démonſtration

ſubſiſte, il eſt évident que l'on n'a rien fait contre la propoſition. Ainſi ces ſimples aſſertions de M. Bézout : que *la propoſition de l'Auteur ne pouvoit être admiſe par les Géomètres. Que l'effet de la force centrale étoit toujours une vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems*; ne portent aucune eſpece d'atteinte à la propoſition dont il eſt ici queſtion. Qu'un corps *A*, ſoit ſuppoſé mû par l'effet d'une ſeule & même impulſion centrale qui le feroit tendre vers un point : ce corps, relativement à ce point, auroit une force centrale, & ſa vîteſſe ſeroit conſtante, puiſqu'elle ſeroit l'effet de la même impulſion qui lui auroit été imprimée tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible. Cette vîteſſe ſeroit la même au commencement, & à la fin d'un même tems; il n'y auroit donc ici nulle *vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems t*, & néanmoins il y auroit une impulſion, ou force centrale qui pouſſeroit le corps vers le point où l'action de la force ſeroit dirigée. Il n'eſt donc pas vrai que l'*effet de la force centrale ſoit une vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems*. Cette propoſition n'eſt vraie que dans le cas de la force accélératrice, & ceſſe de l'être dans le cas dont il s'agit.

SECONDE PROPOSITION.

Qu'il est faux qu'un corps, pesant sur son centre de pesanteur, puisse décrire autour de ce centre, par le mouvement angulaire du rayon vecteur, à l'extrémité duquel ce corps se trouveroit placé, aucune espece de courbes non fermées qui s'écarteroient à l'infini de leur axe, & en conséquence que les forces centripètes que M. Newton assigne pour la génération de ces sortes de courbes sont nulles, fausses & chimériques.

On a vu, dans le cours de cet Ouvrage, combien les démonstrations qui établissent la vérité de cette proposition ont été multipliées, & les résultats constans & uniformes qu'on avoit obtenus par toutes les méthodes qui y ont été employées, & dont il n'a tenu qu'aux Commissaires de l'Académie de prendre connoissance, par le second Mémoire que l'Auteur leur a fait présenter, par le Secretaire même de ladite Académie : mais ces Messieurs ont trouvé beaucoup plus court de

ſe refuſer à l'examen de ce ſecond Mémoire qui auroit pu leur ouvrir les yeux, & de décider que cette propoſition renfermoit *un paralogiſme qui n'étoit même ni ſubtil, ni difficile à trouver, & à détruire*, comme on devoit *naturellement penſer que devoit l'être le paralogiſme qui peut avoir conduit à prétendre renverſer des vérités démontrées*. Le Lecteur aura ſans doute déja remarqué l'abus perpétuel que M. Bézout, Auteur de ce ſecond rapport, comme il l'eſt du premier, ne ceſſe de faire de cette expreſſion, *vérités démontrées*, qui eſt conſacrée pour déſigner les vérités établies par les démonſtrations les plus rigoureuſes, les plus claires & les plus inconteſtables. On a déja obſervé, dans la préface de cet Ouvrage, qu'il ne s'agiſſoit ici que d'une ſimple hypothèſe. Que la queſtion touchant la génération des courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point fixe, n'avoit pas ſeulement été agitée, bien loin d'avoir été élevée au rang des *vérités démontrées*. Qu'on avoit ſeulement ſuppoſé, & non prouvé, qu'un corps pouvoit décrire de telles courbes autour d'un point ; & que partant de cette hypothèſe, on avoit exprimé par de certaines lignes les effets d'une for-

ce dont l'existence étoit tout au moins un problême. Ce sont ces simples hypothèses, que M. Bézout prend pour *des vérités démontrées*; & l'une des démonstrations, dont l'Auteur se sert pour en prouver le faux, pour *un paralogisme qui n'est ni subtil, ni difficile à trouver, & à détruire.* Voyons donc si M. Bézout sera plus heureux à *trouver* un paralogisme dans une proposition exacte, qu'il ne l'a été en donnant de simples hypothèses *pour des vérités démontrées*.

Pour prouver la possibilité du mouvement angulaire autour d'un point, ou son impossibilité, l'Auteur a établi une doctrine exacte, dont M. Bézout ne parle point dans son rapport. Cette doctrine se réduit très-simplement à la détermination de l'élément du mouvement angulaire, dont il seroit question. Quand cet élément se réduit à zéro, il est clair que le mouvement supposé ne sauroit exister, puisque zéro seroit son principe générateur; mais quand l'élément ne se réduira point à zéro, le mouvement sera possible, puisqu'il auroit un principe générateur qui ne seroit point zéro. Rien de plus incontestable que ces principes : supposons donc actuellement un arc infiniment petit $\dot{x}$, décrit dans un

tems infiniment petit $\dot{t}$, & qu'en même tems l'eſpace parcouru croiſſe, à proportion que le tems employé à le parcourir ſeroit ſuppoſé plus grand, & de telle ſorte que l'arc décrit, & le tems employé à le décrire ſoient toujours d'un même ordre. Je dis que dans ce cas, le mouvement angulaire ſera poſſible; puiſqu'ayant un arc $\dot{x}$, décrit dans un tems $\dot{t}$, l'on finiroit par avoir, à la fin d'une ſomme infinie de petits tems $\dot{t}$, un arc fini x, dans un tems fini t. Mais s'il arrivoit au contraire que le tems, & l'eſpace parcouru ne fûſſent pas d'un même ordre, comme, par exemple, ſi l'on avoit un arc infiniment petit $\dot{x}$, qui devroit être décrit dans un tems fini t, ou un arc infiniment petit $\ddot{x}$, du ſecond ordre qui devroit être décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$; je dis qu'alors le mouvement n'exiſteroit point; puiſqu'un arc infiniment petit $\dot{x}$, ſeroit zéro relativement au tems fini t, durant lequel il devroit être décrit, & que de même un arc infiniment petit du ſecond ordre $\ddot{x}$ ſeroit zéro relativement au tems infiniment petit $\dot{t}$, dans lequel il devroit être parcouru. Voilà les principes clairs & évi-

dens, dont on eſt parti dans cette ſeconde propoſition, que M. Bézout ſupprime totalement dans ſon rapport, & qu'il eût fallu par conſéquent détruire pour infirmer l'application que l'Auteur en fait au mouvement d'un corps par la circonférence d'une courbe non fermée, ſuppoſée décrite autour d'un point.

M. Bézout & l'Auteur ſont d'accord que *lorſque le corps ſeroit dans la partie de la courbe la plus éloignée du centre des forces, l'arc décrit ſeroit un infiniment petit du ſecond ordre, dans un tems infiniment petit.* Mais quelle conſéquence tire l'Auteur d'un arc infiniment petit du ſecond ordre, qui ſeroit décrit dans un tems $\dot{t}$, infiniment petit? que cet arc, ſeroit zéro, ſuivant la doctrine qu'il avoit précédemment établie; ou, ce qui revient au même, que dans une ſomme infinie de tems infiniment petits $\dot{t}$, c'eſt-à-dire, dans le cours d'un tems t, fini, l'arc décrit ne ſeroit qu'un infiniment petit $\dot{x}$, & par conſéquent zéro; & que de-là le mouvement angulaire ne pouvoit entrer dans la génération d'une courbe non fermée, puiſque ſon principe générateur ſeroit un arc infiniment petit $\dot{x}$, décrit, non pas dans un

tems infiniment petit $\dot{t}$, du même ordre que cet arc, mais dans un tems fini t, d'un ordre ſupérieur. M. Bézout embarraſſé de cet argument a pris le parti de n'en point parler, & de prouver l'exiſtence d'*un paralogiſme qui n'étoit ni difficile à trouver, ni à détruire*, par ces paroles : » *Lorſque le corps eſt dans la partie de la* » *courbe la plus éloignée du centre des for-* » *ces, l'arc qu'il décrit, non ſeulement*, » dit-il, *peut être, mais doit être infini-* » *ment petit du ſecond ordre, dans un tems* » *infiniment petit*. Voilà tout l'argument de M. Bézout, qui ſe réduit, comme l'on voit, à prouver par ce qui eſt en queſtion. On nie la poſſibilité du mouvement angulaire, quand il arrive que le corps auroit à décrire un arc, infiniment petit $\ddot{x}$, du ſecond ordre dans un tems $\dot{t}$, infiniment petit ; & M. Bézout dit qu'en effet cet arc $\ddot{x}$, doit être décrit dans ce tems $\dot{t}$, quand le corps parcourt une courbe non fermée ; c'eſt-à-dire, qu'il prend pour preuve d'un paralogiſme qui n'*étoit ni difficile à trouver, ni à détruire*, le mouvement même par la courbe non fermée, dont l'exiſtence eſt conteſtée, & qu'il s'agiſſoit d'établir. Si quelqu'un fait ici

ici un *paralogisme qui n'est difficile ni à trouver, ni à détruire*; c'est M. Bézout lui-même, en supposant, qu'il est possible qu'un corps soit mû d'un mouvement angulaire autour d'un point, quand l'élément ou principe générateur de ce mouvement seroit ou un arc infiniment petit $\ddot{x}$, du second ordre, décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, ou un arc infiniment petit $\dot{x}$, décrit dans un tems t, fini.

M. Bézout prétend encore que cette seconde proposition de l'Auteur, « conduit » à cette autre proposition très-certaine» ment absurde.... Le mouvement uni» forme d'un corps en ligne droite est ab» surde; en effet, dit-il, le mouvement » en ligne droite, considéré par rapport » à un point quelconque, pris hors de » cette ligne, est absolument dans le mê» me cas que celui d'un corps qui décri» roit une courbe non fermée ».

M. Bézout a pris cette idée d'une lettre que l'Auteur des propositions lui a écrite, & qu'il a dû lire à l'Académie, comme il en avoit été prié; l'Auteur en avoit fait un moyen de plus pour prouver l'impossibilité de la génération d'une courbe non fermée *AM*, autour d'un point fixe

C, centre de peſanteur du corps *A*, en montrant que l'on pourroit, par la même raiſon, ſuppoſer que la ligne droite *A T*, (*Fig.* 21), pourroit être décrite par le mouvement angulaire d'un rayon vecteur *A C*, qui croîtroit en tems égal, & à l'infini, comme dans la courbe non fermée *AM*, tandis que le mouvement angulaire y diminueroit auſſi, & en tems égal, à l'infini : mais que comme il ſeroit abſurde de ſuppoſer qu'un corps pût décrire la droite *A T*, en tendant continuellement vers un point fixe *C*, dont il s'éloigneroit à l'infini; il étoit tout auſſi abſurde de prétendre qu'il pût décrire la courbe non fermée *A M*, qui ſeroit abſolument dans le même cas que la ligne droite *A T*.

Qui pourroit croire que M. Bézout eût cherché à retourner contre l'Auteur un raiſonnement dont il paroît avoir ſenti toute la force, & qui renverſe de fond en comble l'hypothèſe de la génération des courbes à décrire autour d'un point, par l'aveu même que fait M. Bézout, *que le mouvement en ligne droite, conſidéré par rapport à un point quelconque, pris hors de cette ligne, étoit abſolument dans le même cas que celui d'un corps qui décriroit une courbe non fermée*. Or, il eſt très-

facile de prouver qu'un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire la ligne droite *AT*, ne pourroit tendre en même tems vers un point *C*; puiſque, s'il tendoit vers *C*, il auroit une force centripète, dont l'effet ſeroit de changer à tout inſtant la direction du corps, & par conſéquent de lui faire décrire une ligne courbe. Donc le corps, décrivant la droite *AT*, n'auroit nulle tendance en *C*; & comme M. Bézout convient, que *le mouvement d'un corps par la courbe non fermée, étoit abſolument dans le même cas que celui par la ligne droite AT*. Il s'enſuit, par l'aveu même de M. Bézout, que le corps décrivant la droite *AT*, ou la courbe non fermée *AM*, n'auroit nulle tendance vers un point *C*, pris hors de ces deux lignes.

Quant à ce que dit M. Bézout, que la *propoſition*, dont il eſt ici queſtion, *conduit à cette autre propoſition très-certainement abſurde... Le mouvement uniforme d'un corps en ligne droite, conſidéré par rapport à un point pris hors de cette ligne, eſt abſurde*. La réponſe eſt ici, oui & non; oui ce mouvement eſt abſurde, ſi le corps eſt ſuppoſé tendre vers ce point; mais il n'eſt point abſurde s'il n'y tend point, & que rien ne le détourne de ſa direction rectiligne *AT*.

M. Bézout permettra qu'on lui diſe ; que voilà des objections & des raiſonnemens qui ne ſont guère dignes de lui.

M. Bézout qui ne ceſſe de voir des paralogiſmes, dans les propoſitions les plus exactes, en trouve un nouveau dans le raiſonnement que fait l'Auteur, au ſujet de la loi que ſuivroit le décroiſſement du mouvement angulaire, en tems égal, ſi le corps décrivoit une courbe non fermée autour d'un point. L'Auteur a ſuppoſé que ce décroiſſement, ayant toujours la même cauſe, pouvoit être conſidéré comme uniforme, puiſqu'une même cauſe devoit toujours produire des effets égaux, en tems égaux. La cauſe qui auroit fait décroître le mouvement angulaire donné A, à la fin du premier tems t, d'une quantité m, auroit réduit ce mouvement à la fin de ce tems, à la quantité $A-m$; mais cette cauſe ſubſiſtant dans tous les inſtans ſuivans, il eſt clair que dans une ſuite de tems finis t, ce mouvement ſeroit réduit aux quantités $A-m$, $A-2m$, $A-3m$.... &c ; & enfin à une quantité $A-nm=0$. D'où ſuivroit l'équation $A=nm$. D'où on tireroit $\frac{A}{m}=n$, pour expreſſion du tems de la durée du mouve-

ment angulaire. D'où il ſuivoit qu'afin que le tems n, pût être infini, comme l'exigeroit la deſcription d'une courbe non fermée, qui étoit infinie de ſa nature, il faudroit que le décroiſſement m, du mouvement, à la fin du premier tems fini t, fût infiniment petit à l'égard du mouvement A, puiſque l'on auroit alors $\frac{A}{m} = \frac{A}{\frac{A}{\infty}} = \infty = n$; & pour prouver combien cette propoſition eſt exacte, l'Auteur ne manquoit pas de faire obſerver, qu'en effet quand le décroiſſement m, étoit infiniment petit, à l'égard du mouvement angulaire ſuppoſé A, le corps décrivoit un cercle d'un mouvement uniforme, & que par conſéquent, le tems n, de la durée de ſon mouvement angulaire devenoit infini, puiſque le mouvement ci-deſſus: $A - m$, $A - 2m$, $A - 3m$.... &c. devenoit $A - 0$, $A - 0$, $A - 0$... &c. C'eſt pourtant ce raiſonnement ſi exact, que M. Bézout oſe qualifier *de nouveau paralogiſme qui conſiſte à ſuppoſer que le mouvement angulaire diminue uniformément.*

Mais M. Bézout ne prouve pas que le mouvement angulaire ſuive une autre loi dans ſon décroiſſement en tems égal. Il

n'avoit donc aucun droit, ni aucune raiſon de qualifier de *paralogiſme*, une propoſition qu'il n'a attaquée par aucun raiſonnement. Quand l'Auteur a ſuppoſé que le mouvement angulaire décroiſſoit uniformément, il eſt parti d'un principe qui eſt fort ſimple ; ſavoir, que dès que le mouvement décroît d'une quantité finie *m*, à la fin d'un tems fini *t*. Il y a néceſſairement une cauſe, qu'on peut toujours repréſenter par un obſtacle : par exemple, *P*, qui produit cette diminution *m*, dans le mouvement *A*, du corps, à la fin d'un tems fini *t* ; mais on a droit de ſuppoſer cet obſtacle *P*, conſtant, tant qu'on ne voit rien en lui qui puiſſe faire croître, ou décroître ſon action en tems égal *t*. La cauſe qui fait décroître ici le mouvement angulaire, eſt l'aggrandiſſement de l'angle formé par la direction du mouvement par la tangente, & le rayon vecteur, comme on l'a dit, à la fin de la ſixième Obſervation, cet angle devenant toujours plus obtus, dans une courbe non fermée, à meſure que la courbe s'éloigne davantage du point de ſon origine, & par-là le mouvement angulaire y décroîtroit toujours davantage en tems égal *t* ; puiſque ce mouvement s'éloigneroit toujours plus de l'état où il devroit ſe

trouver, pour que ce décroiſſement devînt nul, qui eſt le cas où l'angle formé par la tangente, & le rayon vecteur feroit de 90 degrés, parce qu'alors la courbe décrite ſeroit un cercle; par exemple, ſi cet angle étoit ſuppoſé de 120 degrés, le mouvement angulaire, à la fin d'un même tems *t*, y décroîtroit plus, que dans un angle de 100, parce que l'angle de 120 degrés s'éloigne davantage de l'angle droit, que l'angle de 100 degrés. Ainſi le mouvement angulaire décroîtroit encore plus dans une courbe non fermée, que s'il décroiſſoit uniformément : mais comme, dans ce dernier cas même, le mouvement angulaire finiroit, & ſeroit détruit, à la fin d'un tems *t*, fini; il s'enſuit qu'à plus forte raiſon ſeroit-il anéanti, dans ce même tems fini, ſi on avoit égard à ce ſurplus de décroiſſement en tems égal.



TROISIEME ET QUATRIEME PROPOSITIONS.

1°, *Que la loi d'une force centrale, en raison inverse du quarré de la distance, est encore fausse dans le cas où le corps seroit supposé décrire une ellipse par l'un de ses foyers.*

2°, *Que c'est à la force de projection, & non point à la loi d'une attraction, en raison inverse du quarré de la distance que l'on doit attribuer l'augmentation, ou la diminution de force centrale qu'éprouve le corps, lorsque la direction de son mouvement par la tangente, & le rayon vecteur forment un angle moindre, ou plus grand qu'un angle droit.*

L'ON a réuni ici ces deux propositions dans un même article, parce que M. Bézout dans son rapport les a réunies, n'ayant dit que très-peu de choses de cette derniere proposition qu'il a cru avoir réfutée, par ce qu'il a dit de la première; l'on a cru aussi devoir changer l'énoncé de cette même dernière proposition, pour se prêter à la délicatesse de cet Académicien qui

en a fait, peut être avec raifon, la cenfure dans fon rapport, mais en obfervant néanmoins de conferver toujours l'efprit de la propofition.

L'Auteur démontre dans ces deux propofitions, ce qu'il a clairement établi dans le cours de cet Ouvrage; favoir, que la force accélératrice du corps, confidérée en foi, & feulement relativement au mouvement angulaire du corps, placé à l'extrémité d'un rayon vecteur r, plus long, ou plus court, étoit toujours $\frac{c^2}{2r}$. L'Auteur, dans ce moment, ne confidére point quel doit être l'état de la force, lorfque la courbe fera oblique fur le rayon vecteur; car dans ce cas l'expreffion de la force devient $\frac{c^2}{2r} \pm R \mp r$, comme il a été prouvé.

Comme c'eft la force de projection qui ajoute, ou retranche ici à la force centrale, cette addition, ou fouftraction, lui eft abfolument étrangère, & c'eft pourquoi en confidérant cette force en foi, & fans égard à l'obliquité de la courbe fur le rayon vecteur, fon expreffion eft toujours $\frac{c^2}{2r}$. Voilà l'efprit de fa propofition, le paralogifme que M. Bézout impute à cette

proposition s'évanouit par cette explication, parce que ce paralogisme n'étoit que conditionnel, & seulement *dans le cas où la courbe décrite est oblique sur le rayon vecteur*, comme s'exprime cet Académicien ; mais il reconnoît que l'expression $\frac{c^2}{2r}$ de la force, à tous les points de la courbe, *seroit vraie si le cercle qui a pour rayon la distance au centre des forces, pouvoit être censé se confondre avec la courbe, au moins dans la portion infiniment petite que le corps décrit*, & c'est précisément là le cas, en quelque sorte, supposé par l'Auteur, lorsqu'il fait abstraction de l'obliquité de la courbe sur le rayon vecteur, & qu'il ne considére la force centrale, dans ce moment, que relativement au mouvement angulaire du corps, & à l'accroissement, ou au décroissement du rayon vecteur, précisément comme il arriveroit si ce rayon s'alongeoit, ou se raccourcissoit sans s'incliner sur la courbe décrite. Cette proposition est donc vraie, aux termes même de M. Bézout; & par conséquent, aussi la dernière proposition, à laquelle il n'est imputé que ce dernier prétendu paralogisme que deux mots d'explication viennent de faire évanouir.

On croit, en terminant l'examen des deux rapports de M. Bézout, devoir dire un mot ſur un reproche qu'il ſemble faire à l'Auteur des propoſitions, d'*avoir préſenté pluſieurs fois à l'Académie, & en particulier à pluſieurs de ſes Membres, pluſieurs Mémoires dont aucun n'a pu être approuvé.*

L'Auteur, en convenant qu'en effet il a été lire pluſieurs Mémoires à l'Académie ſur différens points de Mathématiques, n'accorde pas à M. Bézout, que ces Mémoires n'ayent *pu être approuvés*, par la raiſon très-ſimple, qu'il n'a demandé aucune approbation à l'Académie, & qu'il s'eſt borné, dans les queſtions dont il s'agiſſoit, à recevoir des lumières de ceux qu'il regarde comme ſes Maîtres, & à en retirer tout l'avantage qu'il s'en étoit propoſé en les demandant. Quand on demande des lumières ſur les queſtions ſur leſquelles on ne ſe croit point aſſez éclairé, & qu'on ne propoſe que des doutes à éclaircir, il paroît qu'on ne ſe met pas dans le cas du reproche que fait M. Bézout, de n'*avoir pu être approuvé*, puiſqu'au contraire une conduite de cette eſpèce paroît exempte de tout reproche.

La première Obſervation que l'Auteur ſe ſouvient d'avoir lue à l'Académie, rouloit ſur le point Mathématique. L'Auteur y témoignoit ſa ſurpriſe de ce que les Géomètres ne lui avoient donné aucune expreſſion. On exprime, diſoit-il, une ligne par a, ſon quarré, ſon cube, ſa quatrième puiſſance.... &c. par a^2, a^3, a^4... &c. & le point, qui eſt le principe de l'étendue, n'a aucune expreſſion. Sur cela l'Auteur obſervoit qu'il croyoit qu'il falloit l'exprimer par a^0, comme principe générateur de la ligne a^1. Perſonne dans l'Académie n'a improuvé cette idée qui pourroit avoir ſon degré d'utilité, dans pluſieurs occurrences, comme on le verra, par la ſuite, en admettant ſur-tout des points de différens ordres a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c. à l'infini, comme principes générateurs les uns des autres.

Un très-célébre Géomètre, à qui cette idée avoit été communiquée, écrivoit à l'Auteur : «Je ſuis perſuadé que vos recher» ches ne pourront qu'être fort utiles, l'ex» preſſion que vous donnez du point, re» préſenté par la grandeur lorſque ſon ex» poſant eſt zéro, eſt bien vraie ; car on eſt » toujours convenu qu'en diminuant l'ex-

» posant d'une unité, la grandeur diminue » d'une dimension. Ainsi a^2 représentant » une surface, $a^{2-1}=a^1$ représente une li- » gne ; $a^{1-1}=a^0$ représentera donc la gran- » deur d'une dimension au-dessous de la » ligne ; c'est-à-dire, le point. On a dit » communément que a^0 étoit l'unité, ce » qui bien entendu veut dire la même » chose que le point ; car l'unité est le prin- » cipe de toute grandeur. De ce que la » quantité ne peut diminuer dans son ex- » posant d'une unité sans que la grandeur » représentée par cette quantité ne dimi- » nue d'une dimension, il suit que la » quantité dont on diminue l'exposant d'u- » ne unité devient alors l'élément de la » première ; & c'est aussi la première opé- » ration & le fondement du calcul différen- » tiel, ou de la méthode des fluxions ». L'Auteur n'a donc point ici à rougir d'une idée qui a eu l'approbation d'un des premiers Géomètres de l'Europe, & qui peut répandre le plus grand jour sur la nature de la *curvité*, & nous faire connoître dans quel cas une courbe peut être rectifiée, & dans quel cas elle ne sauroit l'être.

Dans une autre occasion, il traça sur le tableau de la Salle d'assemblée de l'Acadé-

mie, une courbe qui s'étoit présentée à lui sous cette forme : Si l'on coupe les ordonnées *MB*, *NQ*, du cercle, aux points *E*, *O*.... &c; en telle sorte que l'on ait toujours les parties *EB*, *OQ*... &c, de ces ordonnées quatrièmes proportionnelles aux lignes *AD*, *BD*, *AB* : faisant passer une ligne par les points *A*, *E*, *O*, *D*, (*Fig.* 22); l'on aura une courbe *AOD*, & en doublant les ordonnées, cette courbe sera *A*, *E*, *O*, *D*, *S*, *A*.

Actuellement si l'on nomme la constante *AD* (a), la coupée *AB* (x), l'ordonnée *BE* (y). L'analogie relative à cette courbe sera : $a : a - x :: x : y$, & son équation $ay = ax - x^2$, qui ne différe du cercle qu'en ce que la constante a, multiplie y, au lieu que dans le cercle, y, est multiplié par lui-même.

En examinant cette courbe par sa génération & par son équation, l'Auteur fit plusieurs observations ; premiérement, par son équation, & par sa quadrature ; il la jugea tout de suite être une parabole, puisque d'une part l'une des variables n'étoit que du premier degré, tandis que l'autre variable montoit au second, & que d'autre part sa quadrature étoit, comme celle de la parabole, les deux tiers du

rectangle circonscrit. Il s'appliqua donc, pendant quelque tems, à chercher l'arc de parabole auquel on pût appliquer l'équation $ay = ax - x^2$; & ne cherchant cet arc que vers une des branches de cette courbe, il eut la mal-adresse de ne pas le trouver d'abord; il se convainquit même, ce qui n'étoit pas difficile, qu'il n'existoit aucun arc sur l'une des branches de cette courbe, auquel cette équation pût convenir. D'autre part, il lui paroissoit fort extraordinaire qu'on pût appliquer cette même équation à aucune partie de la parabole, à cause qu'il devoit en résulter qu'une courbe infinie & non fermée, telle qu'est cette courbe, pourroit donner une équation, à la maniere des courbes fermées, déterminées, sur une ligne finie *AD*, qui pourroit être considérée comme son axe, propriété jusques-là inconnue à la parabole. Enfin l'Auteur conclut de ces différentes réflexions, qu'il étoit peut-être possible que cette courbe *AEODSA*, fût une courbe particulière, fermée, & fort approchante de la parabole. C'est dans cette vue qu'il la mit sous les yeux des Géomètres de l'Académie, afin qu'ils pussent en déterminer la nature. Il n'y eut guère que MM. d'Alembert, &

le Bossu qui l'examinèrent, & qui, par son équation, la jugerent appartenir à la parabole, à quoi l'Auteur ne s'opposa nullement. Il ajouta au contraire qu'*elle lui avoit paru telle, mais qu'il n'avoit pu trouver aucun arc de parabole auquel on pût en rapporter l'équation.* Il en écrivit même à M. d'Alembert, qui voulut bien par sa réponse, le confirmer dans l'idée que l'équation $ay=ax-x^2$, ne pouvoit qu'appartenir à la parabole, & dissiper toute idée de courbe fermée. L'Auteur rechercha donc de nouveau l'arc de parabole, auquel cette équation pût appartenir, & il le trouva enfin. Et c'est à M. d'Alembert à qui il en a l'obligation : la détermination de cet arc, fait découvrir une très-belle propriété de la parabole, jusqu'à présent inconnue; & fournit un moyen d'en former l'équation, à la manière des courbes fermées, en considérant la ligne finie AD, comme son axe.

Soit donc une parabole AMD; MT son axe, F son foyer; menant, par son foyer F, la double ordonnée AD, que l'on nommera a, & sur laquelle on prendra les coupées DR, DQ... &c. (x), si l'on nomme les perpendiculaires RP, QN..... &c, y; l'on aura, à tous les points

points de l'arc parabolique AMD, cette analogie : $AD : (a) : AR\ (a-x) :: DR\ (x) : RP\ (y)$; c'eſt-à-dire, $a : a-x :: x : y$. D'où réſultera l'équation $ay = ax - x^2$. On peut rendre cette équation générale en ſuppoſant l'abſciſſe x, multipliée par un nombre n, quelconque, ce qui donneroit $ay = nax - nx^2$, & dans le cas où $n = \frac{33}{14}$, cette parabole ſeroit à peu près égale au demi-cercle, dont le diamètre ſera l'axe a, de cette parabole, comme il eſt facile de s'en aſſurer.

On conviendra que cette propriété de la parabole, mérite bien, autant qu'une autre, de tenir rang parmi les autres propriétés remarquables de cette courbe, & comme c'eſt à quoi ſe ſont terminées les obſervations auxquelles l'équation $ay = ax - x^2$, a donné lieu ; & que l'Académie ne *peut qu'approuver* le travail, & le zele de ceux qui découvrent de nouvelles propriétés dans les courbes. On ne voit pas juſqu'ici ſur quoi peut porter le reproche que M. Bézout fait à l'Auteur, d'*avoir préſenté des Mémoires, dont aucun n'a pu être approuvé* ; d'autant plus que l'Auteur ſe ſouvient très-bien d'avoir fait part à M. Bézout lui-même, de cette nouvelle

propriété découverte, à laquelle l'équation $ay = ax - x^2$, avoit donné lieu.

La dernière fois que l'Auteur a été à l'Académie, il a préſenté pluſieurs démonſtrations, tendantes à prouver que la meſure réelle de la force accélératrice d'un corps qui décriroit un cercle, étoit $\frac{c^2}{2r}$, & non point $\frac{c^2}{r}$, comme la plupart des Géometres actuels le penſoient. Sur quoi M. Bézout doit ſe reſſouvenir que cette propoſition fut fort conteſtée par M. de la Lande, qui aſſura que *tous les Géomètres étoient d'accord aujourd'hui ſur cette meſure, qui étoit* $\frac{c^2}{r}$, *& non point* $\frac{c^2}{2r}$, *comme quelques Géomètres du ſiecle paſſé l'avoient penſé*, & ce fut même cette improbation que M. de la Lande donna publiquement à la meſure $\frac{c^2}{2r}$, qui fut cauſe que l'Auteur demanda des Commiſſaires à l'Académie, à l'effet de faire juger ce point qui lui étoit conteſté par l'un de ſes Membres. Perſonne dans l'aſſemblée n'avança que *tous les Géomètres avoient toujours été d'accord à recevoir les deux meſures* $\frac{c^2}{2r}$, *&* $\frac{c^2}{r}$, ſuivant que le cercle étoit conſidéré

comme courbe rigoureuſe, ou comme courbe poligone ; c'étoit là une idée que perſonne n'avoit que M. Bézout, qui en fit part à l'Auteur, après l'aſſemblée, plutôt comme d'un ſentiment qui lui étoit particulier, que comme celui de tous les Géometres. Mais comment accorder M. de la Lande, avec M. Bézout ? Le premier dit publiquement en pleine Académie, ſans même être déſavoué, *que tous les Géometres étoient d'accord aujourd'hui* à adopter pour meſure unique de la force centrale $\frac{c^2}{r}$, & qu'ils avoient reprouvé la meſure $\frac{c^2}{2r}$, que quelques Géometres du ſiecle paſſé avoient adoptée. On lui cite même envain Newton, dans l'un de ſes corollaires, MM. Huighens & de l'Hôpital ; il perſiſte toujours dans ſon ſentiment, malgré les démonſtrations qu'on met ſous ſes yeux, & l'autorité de ces trois Géometres célebres, ce qui donne lieu à l'Auteur des propoſitions de demander des Commiſſaires, pour faire décider ce point controverſé. Comment, diſons-nous, accorder ce ſentiment avec celui de M. Bézout, qui dit aujourd'hui que les deux meſures $\frac{c^2}{2r}$, & $\frac{c^2}{r}$, ont toujours été,

& ſont encore aujourd'hui reçues de l'univerſalité des Géomètres, & que l'*une de ces meſures n'exclut pas l'autre.* C'eſt même ce ſyſtême qu'il oppoſe perpétuellement à l'Auteur des propoſitions, pour lui ravir juſqu'à la foible ſatisfaction d'avoir pu contribuer, par ſes recherches, à éclaircir une queſtion importante qui étoit devenue au moins très-obſcure. Il ne veut même pas que l'Auteur diſe qu'il a obtenu, en cette occaſion, un *jugement favorable de l'Académie*, parce qu'en effet, dans le ſyſtême actuel de M. Bézout, il falloit que l'Auteur n'*eût pu être approuvé* ſur aucun point, pas même lorſque M. Bézout lui écrit le 4 Juillet dernier, ce qui a même formé le jugement de l'Académie, contre le ſentiment de M. de la Lande : » qu'il eſt bien fondé à prendre pour meſure de la hauteur que la force centrale » feroit décrire à un mobile, dans le tems » qu'il décrit uniformément l'arc quelconque c, d'une circonférence de cercle, » dont le rayon eſt r, à prendre, dis-je, » pour meſure de cette hauteur la quantité » $\frac{c^2}{2r}$; cela eſt inconteſtable pour l'arc fini, » & pour l'arc infiniment petit.

Cette propoſition avoit été conteſtée en

pleine Académie, par M. de la Lande, ce qui donna lieu à l'Auteur des propositions de demander des Commissaires pour la faire juger par l'Académie. L'Académie la décide en faveur de l'Auteur, sur le rapport même de M. Bézout, & de M. du Séjour; & M. Bézout ne veut pas que l'Auteur dise qu'il a obtenu, en cette occasion, *un jugement favorable de l'Académie.* Comment donc veut-il qu'il qualifie le jugement rendu sur cette proposition contestée?

On doit sentir que le système de M. Bézout ne compatit pas avec l'aveu que l'Auteur auroit fait *des découvertes intéressantes dans la partie des Mathématiques des forces centrales : nous ignorons*, dit-il, *qu'elles sont ces découvertes.* Mais n'y eût-il que celles des paralogismes de M. Bézout, dans ces deux rapports, & dans ses lettres; N'y eût-il que le renversement d'un système faux, qui conduit de grands Géomètres à déprimer des vérités utiles, ou qui peuvent le devenir par la suite, & la manifestation de l'affectation marquée de transformer perpétuellement la vérité prouvée en erreur; ces découvertes seules seroient assez importantes pour devoir satisfaire l'Auteur des propositions, puis-

que ç'a toujours été un moyen puiſſant de procurer l'avancement des ſciences que celui de dévoiler les erreurs & les préjugés des grands hommes, qui, par leur célébrité, juſtement méritée, pouvoient les accréditer dans les eſprits.

Il eſt aſſez ſingulier que M. Bézout qui a l'honneur d'être Membre d'un corps particuliérement inſtitué pour protéger les ſciences, & pour exciter le zele & le travail parmi les Sujets du Roi, qui ſe conſacrent à la recherche des vérités utiles, mette l'Auteur des obſervations dans l'obligation d'avoir à ſe juſtifier de pluſieurs idées qu'il a bien voulu communiquer à l'Académie, à quoi rien ne l'obligeoit que ſon amour pour les ſciences, & le deſir de leur accroiſſement; tandis qu'au contraire ſa qualité d'Académicien lui impoſoit le devoir rigoureux de paroître ſavoir gré à l'Auteur, au moins de ſon zele qui le portoit à faire part de ſes vues à l'Académie, ſans y être tenu, loin de lui en faire un reproche auſſi injuſte qu'amer, & plus propre à éteindre qu'à exciter dans les cœurs ce zele, & cet amour du travail auxquels les Arts & les Sciences doivent tout leur luſtre.

Il ne reste plus qu'à prouver à M. Bézout, que les principes de l'Auteur des observations peuvent en effet conduire à des vérités utiles, dans la partie de l'Astronomie physique, & que ceux de M. Bézout en seroient plutôt la ruine. Il suffira pour cela de faire deux ou trois applications de ces mêmes principes.

Application de la mesure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ *de la pesanteur d'un corps qui décriroit un cercle, à la détermination des mouvemens de révolution & de rotation des corps du Systême planétaire.*

L'on a vu que M. Bézout reprouvoit la mesure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ de la pesanteur, *qui*, suivant lui, *ne peut être admise par les Géomètres*, & qu'il lui substitue $\frac{c^2}{r}$, ou $\frac{c^2}{2r}$, suivant les cas déja expliqués. Delà il suit que la mesure des efforts que feroit un corps pour détruire toutes les forces centrifuges, en décrivant un cercle, ou, ce qui revient au même, pour s'échapper de la direction de toutes les tangentes

finies qu'il tendroit à parcourir en décrivant un arc x, dans un tems t, seroit $\frac{x^2}{2r}$, ou $\frac{x^2}{r}$; & dans un tems $2t$, $3t$, $4t$... &c. l'arc décrit étant double, triple, quadruple.... &c. La mesure de ces efforts seroit $\frac{4x^2}{2r}$, $\frac{9x^2}{2r}$, $\frac{16x^2}{2r}$... &c.; c'est-à-dire, que la mesure des efforts croîtroit comme les quarrés des tems, ou des arcs parcourus pendant ces mêmes tems, ce qui est un très-grand paralogisme, entiérement destructif du mouvement circulaire; car il s'ensuivroit delà que la pesanteur qui est constante quand le corps décrit un cercle, varieroit en raison du quarré de l'arc décrit, puisque pendant la description d'un arc double, triple, quadruple... &c. le corps recevroit 4, 9, 16... fois plus d'impulsion centrale par la force qui opéreroit sa pesanteur. Ainsi les principes de M. Bézout, sont donc entiérement destructifs du mouvement circulaire, & on peut les taxer, avec bien plus de raison que lui, de *ne pouvoir être admis par les Géomètres*. La mesure de la pesanteur d'un corps qui décriroit un cercle ne peut donc être ni $\frac{c^2}{2r}$, ni $\frac{c^2}{r}$. Cette mesure ne peut

être que de la nature même de la force conſtante, & uniforme qu'elle repréſentera, par conſéquent proportionnelle au tems, & non point au quarré du tems. Mais une force motrice dont les effets, ou eſpaces qu'elle feroit parcourir, feroient proportionnels aux tems, employés à les décrire, eſt évidemment une force dont l'effet eſt réduit à une ſeule & même impulſion communiquée au corps tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible; puiſque quand le corps eſt mû de la ſorte, il parcourt toujours des eſpaces proportionnels au tems employés à les parcourir.

Ainſi quand un corps décrit un cercle, ſa peſanteur n'eſt, & ne peut être que l'effet d'une ſeule & même impulſion qui lui aura été imprimée, par la force centrale, tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible. C'eſt en vertu de cette ſeule impulſion que la peſanteur du corps, & ſes effets feront uniformes, dans tous les points de la circonférence du cercle qu'il décrira. Si l'on ſuppoſoit que le corps reçût une ſuite d'impulſions centrales, dans une ſuite de momens; il eſt clair que la vîteſſe de ce corps iroit toujours en augmentant, & que les effets qui en réſulteroient ne pourroient plus être uniformes.

Soit donc un corps *C* (*Fig.* 24), & *OGO*, le cercle qu'il devroit parcourir autour du point *F*; ce corps ne pouvant décrire cette courbe, que par l'effet d'une ſeule & même impulſion centrale *CN*, qui lui ſeroit communiquée, tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible, comme il vient d'être dit, combinée avec une force de projection *CB*, qui lui ſeroit imprimée en même tems, & auſſi par l'effet d'une ſeule & même impulſion; il eſt évident que le corps, en vertu de ces deux impulſions, décriroit la ligne droite *CMG*: Mais devant décrire le cercle *OGO*, ce ſera une néceſſité qu'il s'appuye ſur le cercle *OMGO*, qui par conſéquent ſera matériel; qu'il roule ſur ce cercle, comme une boule ſur un plan, dans le cas où il ſera de forme ſphérique; & en conſéquence qu'il ſoit animé tout à la fois d'un mouvement de rotation, & d'un mouvement de révolution, puiſque ſon centre *C*, de peſanteur ſeroit, à tout inſtant, entraîné vers un point *M*, de la circonférence *MGM*, ce qui ſeroit le principe de ces deux mouvemens. L'on voit que le mouvement du corps ſe faiſant dans la direction de la diagonale *CM*, du parallélogramme des forces *CN*, *CB*; ce corps

ne pourroit, dans le cas où il ſeroit de forme ſphérique, que tourner ſur lui-même, dans le même tems qu'il parcourroit le cercle *OMGO*.

Voilà comment un corps *C*, peut décrire un cercle *OMGO*, autour d'un point *F*, en vertu d'une ſeule impulſion centrale *CN*, combinée avec une force de projection *CB*. On voit alors que l'effort du corps pour ſe retirer de la direction des tangentes *CB*, eſt conſtant; & que ſi cet effort étoit employé à faire décrire un eſpace au corps, ce corps parcouroit cet eſpace d'un mouvement uniforme.

Mais comme les corps du ſyſtême planétaire ne peuvent être mûs que de cette ſorte, il s'enſuit qu'ils rouleront ſur une orbite matérielle *OMGO*, comme une boule ſur un plan, puiſqu'ils ſont de forme ſphérique, & qu'ils ſeront par conſéquent animés d'un mouvement de rotation, & d'un mouvement de révolution, en parcourant leur orbite, ce qui eſt en effet parfaitement conforme aux obſervations. D'où il ſuit que la courbe qu'ils décriront, ſera une véritable épicycloïde, comme il réſulte encore des mêmes obſervations.

Ainſi l'expreſſion $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ de la peſanteur conduit donc à des vérités utiles dans la partie de l'Aſtronomie phyſique, puiſqu'elle nous fait trouver la véritable maniere dont les corps du ſyſtême planétaire font leur mouvement, ſans en excepter même le mouvement de rotation qu'on n'a pu déduire juſqu'ici d'aucune loi générale; tandis que l'expreſſion $\frac{c^2}{2r}$, ou $\frac{c^2}{r}$ que M. Bézout lui ſubſtitue ne conduit qu'à la ruine même de ces mouvemens, & par conſéquent de toute l'Aſtronomie phyſique.

Application du principe des orbites matérielles à la détermination de la diſtance de la Terre au Soleil.

Nous déterminerons d'abord la diſtance de la terre à la lune. Le rayon du globe terreſtre eſt de $1432\frac{1}{2}$ lieues, qui font 19658064 pieds. Nos graves parcourent proche la ſurface de la terre, environ 54000 pieds dans la premiere minute: faiſant le calcul, on trouvera que nos graves employeroient environ 13 minutes

à parcourir le demi-rayon du globe terreſtre, ou 9829032 pieds.

Mais ſi l'on ſuppoſoit qu'un corps décrivît un cercle à un rayon du centre du globe terreſtre, ce corps circuleroit avec la vîteſſe qu'il auroit acquiſe, après être tombé de la hauteur du demi-rayon du globe de la terre, ou de 9829032 pieds. Ce corps, dans le cours de 13 minutes, décriroit donc un arc égal au rayon du globe de la terre, & par conſéquent, il parcourroit la circonférence entière de ce globe, dans le cours d'environ 81 minutes. Tel eſt le tems que ce corps employeroit à faire ſa révolution autour du centre de la terre.

Mais le tems de la révolution de la lune, autour du même globe, eſt de 39343 minutes, dont le quarré eſt 1547871649; nommant D, la diſtance en rayon de la terre, de la lune au centre de la terre, l'on aura, par la ſeptième Obſervation, l'analogie ſuivante : $81' \times 81' : 1547871649' :: \overline{1}^{3} : D^3$. Donc $D^3 = \frac{1547871649^R}{6561} = 235767^R$: & par conſéquent D, égalera un peu moins de 62 rayons de la terre. La diſtance moyenne de la lune au centre de la terre, ſera donc d'un peu moins que de 62 rayons du globe terreſtre.

Soit actuellement la lune *L*, dans un point de ſon orbite, dont la terre *C*, occuperoit le centre. Ces deux corps tournent enſemble, & d'un mouvement commun autour du ſoleil *F*; puiſqu'ils commencent & achevent en même tems leur révolution : faiſant abſtraction, pour un moment, du mouvement de la lune autour de la terre qui n'a aucun rapport avec ſon mouvement autour du ſoleil, & la ſuppoſant fixe en un point *L* de ſon orbite : ce ſatellite décriroit l'arc *LV*, de ſon orbite, autour du ſoleil, quand la terre *C*, décriroit l'arc *CT*, autour du même aſtre ; le mouvement angulaire *LFV*, étant le même pour les deux corps. Donc ces deux corps ſeront mûs d'un mouvement égal à celui que produiroit l'orbite matérielle *LODL* de la lune qui rouleroit ſur le cercle immobile & matériel *OGO*, & qui par ſon mouvement, plus vif en *L*, qu'en *C*, comme plus loin du point *O*, d'attouchement des deux orbites, feroit décrire à la lune l'arc plus grand *LV*, quand la terre décriroit l'arc moindre *CT*. Mais l'orbite mobile *LODL*, en roulant ſur le cercle immobile *OGO*, feroit tourner la terre, placée au centre de cette même orbite, autour de ſon axe, dans

le même tems qu'elle parcourroit ſon orbite *CT*, autour du ſoleil; de ſorte que quand l'orbite mobile *LODL* auroit appliqué tous les points de ſa circonférence ſur la circonférence du cercle immobile *OGO*, la terre auroit fait un révolution autour de ſon axe. Donc le nombre des révolutions de l'orbite mobile ſur le cercle immobile ſera exactement égal au nombre des rotations de la terre.

Mais la terre tourne 365 fois autour de ſon axe, dans le tems d'une ſeule de ſes révolutions autour du ſoleil. Donc l'orbite mobile *LODL*, fera un pareil nombre de révolutions ſur le cercle immobile *OGO*; c'eſt-à-dire, que dans le cours de 365 rotations de la terre, cette orbite s'appliquera 365 fois ſur le cercle immobile *OGO*, & par conſéquent, la circonférence de ce cercle ſera 365 plus grande que la circonférence de l'orbite de la lune *LODL*. Ainſi ces deux circonférences, ou leur rayon *CO*, *OF*, ſeront entr'eux comme le tems de la rotation de la terre eſt au tems de ſa révolution, ou comme 1 à 365 : mais $CO =$ 62 rayons du globe de la terre; donc $OF = 62^{R} \times 365 = 22630$ rayons terreſtres. Donc $FO + OC = 22630 + 1 = 22631$

rayons du globe de la terre, ou 32418907 $\frac{1}{2}$ lieues. Ainsi la distance de la terre au soleil est de 32418907 $\frac{1}{2}$ lieues.

Les principes de l'Auteur des Observations conduisent donc à des vérités utiles, dans la partie de l'Astronomie physique ?

Si la planète *C*, représente, par exemple, Vénus ou Mars, faisant *CO*, est à *OF*, comme le tems de la rotation de la planète est au tems de sa révolution ; l'on déterminera par-là les rayons *CO*, *OF*, des deux cercles dont l'un roulant sur l'autre, opérera toujours le mouvement de rotation, & le mouvement de révolution du globe planétaire. Il est évident que quand les planètes ont des satellites comme Jupiter & Saturne, le cercle de rotation doit s'étendre jusqu'au dernier satellite.

Ces principes font trouver que la distance du dernier satellite de Jupiter, à la planète centrale, n'est que de 155 mille lieues, au lieu de 380 mille, à quoi cette distance est ordinairement portée.

Le tems de la révolution de Saturne étant connu, ainsi que sa distance au soleil ; si l'on connoissoit exactement sa distance à son dernier satellite, il est évident que l'on pourroit déterminer par ces

principes

principes le tems inconnu de ſa rotation. Suivant les calculs actuels, Saturne eſt 300 fois plus éloigné du ſoleil que de ſon dernier ſatellite; le tems de ſa révolution étant d'environ 30 ans, le tems de ſa rotation ſeroit d'environ $\frac{30}{300} = \frac{1}{10}$ d'années ou 36 jours; mais comme ce tems eſt sûrement trop long par comparaiſon au tems de la rotation des autres planètes, il s'enſuit que le dernier ſatellite de Saturne doit être beaucoup plus près de ſa planète centrale qu'on ne le place communément.

Comme la lune *L*, préſente toujours la même face à la terre *T*, les Aſtronomes en ont conclu qu'elle avoit un mouvement de rotation qui s'achevoit préciſément dans le même tems que celui de révolution. Dès lors il faut concevoir ce ſatellite placé au centre *L*, d'un cercle mobile, & matériel *MANB*, qui rouleroit ſur un cercle immobile & égal *NCEN*; & alors la lune, ſuivant l'impreſſion du cercle mobile *MANB*, décriroit l'orbite *LABL* (*Fig.* 25), autour de la terre *T*, dans le même tems qu'elle tourneroit ſur elle-même, & la vîteſſe *LD*, qui lui ſeroit imprimée, ainſi qu'au cercle *MANBM*, étant telle que ce cercle employât envi-

ron 27 jours à faire sa révolution sur le cercle immobile & égal *NCEN*, il est manifeste que les deux mouvemens de révolution & de rotation de ce satellite s'acheveroient dans ce même espace de 27 jours.

Il faut observer que la lune ne peut décrire une orbite régulière autour de la terre, à cause qu'elle tourne en même tems autour de deux centres; savoir, autour du soleil, par un mouvement qui lui est commun avec la terre, & autour de la terre par un mouvement qui lui est particulier. Mais en tournant autour de la terre, elle se trouve nécessairement tantôt plus loin, tantôt plus près du soleil que la terre, ce qui fait varier à tout instant sa force centripète vers le soleil; car cette force est tantôt plus grande que celle de la terre vers le même astre, & tantôt plus petite, & par-là sa force centripète vers la terre varie aussi; puisqu'il est évident que quand la lune aura plus de tendance vers le soleil, elle en aura d'autant moins vers la terre, & quand au contraire sa tendance vers le soleil sera moindre, sa force centripète vers la terre sera plus grande. D'où il suit que toutes les variations de ce satellite ne peu-

vent procéder que de sa tendance vers deux centres différens, le soleil & la terre, autour desquels elle doit achever ses deux révolutions en différens tems; savoir, en 365 jours autour du soleil, & en 27 jours environ, autour de la terre.

L'on voit par-là comment M. Newton est parvenu à une explication assez heureuse des mouvemens de la lune, par la loi des deux centres vers lesquels il fait, avec raison, tendre ce satellite : mais la raison de cette tendance dérive du mouvement de révolution de ce satellite autour de ces deux centres ; car la lune ne tend vers le soleil, que parce qu'elle tourne autour de cet astre, de même qu'elle ne tend vers la terre, que parce qu'elle tourne autour de ce globe ; & cette double révolution, autour de ces deux centres, suppose une double tendance vers ces mêmes centres, d'où procédent nécessairement toutes les variations que les Astronomes remarquent dans les mouvemens de ce satellite.

REMARQUE.

Au reste, cette révolution des corps célestes, sur la circonférence d'orbites

matérielles, eſt celle même à laquelle on ſera toujours ramené, lorſqu'on aura conſidéré toute choſe dans le mouvement des corps autour de leur centre de tendance; mais principalement la diminution perpétuelle de l'action tangentielle, cauſée par la peſanteur, dans l'hypothèſe où les corps ſeroient mûs ſans s'appuyer ſur de telles orbites. Quand un corps circule autour d'un centre *C* (*Fig.* 4), les forces centripète & centrifuge *BO*, *BD*, étant en oppoſition; l'on doit concevoir qu'à tout inſtant la force de la peſanteur *BO*, détruit la partie *BD* de force centrifuge qui lui eſt contraire & égale; enſorte que, dans le cours d'une ſeule demi-révolution *ABE*, l'action tangentielle devroit ſe trouver conſidérablement diminuée, par les pertes que la force de la gravité lui auroit fait éprouver, pendant ce même tems; enſorte que le mobile, parvenu en *E*, n'auroit plus aſſez de force pour retourner au point *A*, du départ; c'eſt même ce que l'on éprouve quand on fait tourner un corps en rond, comme la pierre dans la fronde, ſi la main n'ajoute pas, à tout inſtant, de nouveaux degrés de vîteſſe dans la direction de la tangente, la pierre n'a plus aſſez de force pour re-

monter au point le plus élevé de la circonférence, quand même on auroit égard à la résistance de l'air, & que l'on supposeroit que ce mouvement s'exécuteroit dans le vuide; car la force des degrés de vîtesse que la main ajoute de moment en moment, pour que le mouvement de révolution de la pierre puisse continuer, surpasse de beaucoup l'action de l'air contre la pierre. Ainsi la perpétuité du mouvement de révolution, autour du centre de pesanteur des corps circulans, soit par la circonférence d'un cercle, ou d'une ellipse, est uniquement fondée sur l'hypothèse que la force de la gravité ne retrancheroit jamais rien à l'action de la force tangentielle; ce qui est une hypothèse absolument fausse, qu'on a cherché à étayer d'une mauvaise démonstration, en prétendant, d'après le parallélograme des forces ou d'autres procédés qui ne sont pas plus exacts, que la force par la tangente étoit infiniment grande, à l'égard de la force de la gravité, & qu'ainsi celle-ci ne pouvoit faire perdre à celle-là qu'une force infiniment petite dans un tems fini, ce dont nous avons démontré toute l'absurdité, par notre seconde & troisième Observations. Nous avons même prouvé que nom-

mant C, la circonférence du cercle décrit; ces deux forces, loin d'être entr'elles dans un rapport infini, étoient comme C, à $\sqrt{3\frac{1}{7}C}$. On doit considérer la pesanteur dans un corps, comme l'obstacle que la force par la tangente doit perpétuellement surmonter : or une force ne peut surmonter un obstacle qui lui résiste qu'à ses propres dépens, & en perdant à chaque instant la partie de force qu'elle employeroit pour le vaincre. Nommons F, la force par la tangente; P, la pesanteur ou résistance du corps. La force étant F, au commencement du premier tems t, ne sera plus, à la fin de ce tems, que $F-P$, & successivement $F-2p$, $F-3p$, $F-4p$... &c. à la fin du second, troisième, quatrième... &c. tems t. Donc à la fin l'on auroit $F-np=0$; d'où on tireroit cette égalité $F=np$, & par conséquent, $\frac{F}{p}=n$. Ainsi $\frac{F}{p}$, ou la force divisée par l'obstacle, seroit égale au nombre n, de tems t, de la durée de la force; c'est-à-dire, que l'obstacle, ou la pesanteur p, auroit détruit la force, ou mouvement F, par la tangente, à la fin d'un tems $n\,t$ au plus tard. Ce tems même peut être fort abrégé

dans plusieurs cas, comme quand le corps s'approche du centre.

On voit que $\frac{F}{p}$, est véritablement l'expression du tems de la durée de la force; car ce tems seroit d'autant plus long, ou d'autant plus court, que l'obstacle, ou la pesanteur *p*, qu'on suppose toujours constant seroit moindre, ou plus grand à l'égard de la force *F*; puisque ce tems seroit infini, dans le cas où l'obstacle, ou la pesanteur *p*, seroit infiniment petit à l'égard de la force *F*, ainsi qu'il devroit, en effet, arriver dans ce cas : par conséquent, dès que la force *p*, de la gravité devroit finir par détruire entiérement le mouvement de projection *AT*, il s'ensuit que le mobile ne pourroit jamais faire une seule révolution *ABA* (*Fig.* 4), autour du centre *C*, de pesanteur, puisqu'il parviendroit bientôt vers un point où se termineroit son mouvement tangentiel; ensorte qu'il resteroit livré à l'action de sa seule pesanteur qui le précipiteroit vers son centre *C*, de tendance. Si donc les corps du systême solaire étoient mûs, comme on le dit, sans rouler, ou glisser sur des orbites matérielles; ces corps n'auroient jamais pu faire une seule révolution, autour du

ſoleil ; leur centre commun de peſanteur ; ce qui eſt la plus grande difficulté que préſente ce ſyſtême, & celle qu'il ne faut ceſſer de lui oppoſer, pour en montrer toute l'abſurdité. Cette conſéquence eſt même avouée par les plus ſavans Newtoniens ; ou, pour mieux dire, c'eſt eux-mêmes qui la tirent du principe que *la force centripète doit être en rapport fini avec le mouvement tangentiel. Cette propoſition*, diſent-ils, *eſt evidemment fauſſe, puiſque ſi elle étoit vraie, le corps à chaque inſtant s'écarteroit de la direction précédente d'un angle fini ; ce qui le feroit, au bout de quelques inſtans, tomber dans le centre des forces.* C'eſt ce qu'écrivoit à l'Auteur, un des plus célèbres Newtoniens.

Il faut convenir que voilà une ſingulière manière de raiſonner, & de prouver qu'une propoſition eſt *évidemment fauſſe*. On nie la poſſibilité de la perpétuité du mouvement de révolution, quand le corps circuleroit autour du centre des forces, ſans s'appuyer ſur des orbites matérielles ; & les Newtoniens prennent pour preuve de la fauſſeté de cette propoſition, le défaut même de perpétuité dans le mouvement de révolution qu'on reproche à leur méthode, & dont ils avoient à ſe juſtifier.

On accorde aſſurément que, par cette méthode, le corps à *chaque inſtant s'écarteroit de la direction précédente d'un angle fini, ce qui le feroit tomber bientôt dans le centre des forces*, & cela par la raiſon très-ſimple que le mouvement tangentiel décroiſſant à chaque inſtant, la force de la gravité auroit toujours un plus grand effet ſur ce mouvement; ce qui inclineroit toujours davantage, en tems égal, ſa direction ſur le rayon vecteur; & dès-là l'angle formé par ce rayon, & cette direction étant toujours moindre, la force centrale du corps en ſeroit augmentée; ce qui rapprocheroit toujours davantage le corps de ſon centre de peſanteur, ainſi qu'il a été prouvé; d'où ſuivroit une augmentation en tems égal de l'action de la force centrale ſur le mouvement tangentiel, enſorte que la force centrale croiſſant toujours aux dépens du mouvement tangentiel, ce mouvement ſeroit bientôt détruit.

On a ſenti ici toute la force de la difficulté; & pour la prévenir, on a été forcé d'adopter un principe évidemment erroné; ſavoir, *que la force centripète n'étoit jamais qu'une grandeur élémentaire, ou, ſi l'on veut, infiniment petite par rapport à la vîteſſe du corps, & que lorſqu'on for-*

moit un parallélogramme, dont un côté représentoit la vîteſſe du corps, & l'autre la force centripète ; il falloit que ce dernier côté fût infiniment petit par rapport au premier. C'eſt ce qu'écrivoit encore à l'Auteur le même Géomètre, dont il vient d'être parlé, & ce qu'on trouve conſigné dans tous les ouvrages des Géomètres Newtoniens.

Mais d'abord comment ſait-on que la force centripète n'*eſt qu'une grandeur élémentaire, ou infiniment petite, par rapport à la force tangentielle du corps?* Les forces ne peuvent être connues que par leurs effets. Le rapport de ces effets, en tems égal, pourra donc exprimer le rapport des forces. L'on vient de voir que ſi un corps circuloit à un rayon *A C*, du centre *C* (*Fig.* 4), de la terre ; ce corps, dans l'eſpace de 13 minutes, décriroit un arc égal au rayon *A C*, du globe de la terre, ou 19658064 pieds, d'un mouvement uniforme ; tandis que la force accélératrice lui feroit parcourir, dans le même tems, la moitié de cet eſpace ou 9829032 pieds, & la peſanteur la racine quarrée de ce dernier eſpace, ou 3136 pieds environ, d'un mouvement également uniforme, pendant le même tems de

13 minutes. Les deux forces seront donc entr'elles, comme 19658064 est à 3136; c'est-à-dire, environ comme 6268 à l'unité. Il est donc faux que la pesanteur, ou *force centripète, ne soit qu'une grandeur élémentaire, ou infiniment petite, à l'égard de la force de projection, ou de la vîtesse du corps*, puisque cette force, proche la surface de la terre, seroit à la force de projection, comme 1 à 6268; c'est-à-dire, que quand la pesanteur feroit parcourir un pied à un corps, proche la surface de la terre, la force de projection lui en feroit décrire environ 6268.

Il en seroit de même si l'on comparoit les deux forces relativement au mouvement de la terre autour du soleil; faisant le calcul, on trouveroit que la force de la pesanteur, est à celle de projection, comme l'unité à 8051, environ; c'est-à-dire, que quand la pesanteur feroit parcourir un pied à la terre, la force de projection lui en feroit décrire environ 8051. Cette derniere force seroit donc plus grande, à l'égard de la pesanteur, autour du soleil, & à environ 32418907 $\frac{1}{2}$ lieues de cet astre, qu'elle ne seroit autour du centre du globe terrestre, à un rayon de ce même globe. A supposer donc que

la force de projection fût toujours plus grande à l'égard de la force de la gravité, à proportion que le corps circuleroit toujours plus loin de son centre de pesanteur; l'on voit, qu'afin que cette premiere force pût être infiniment grande, par rapport à la seconde, il faudroit que le corps circulât à une distance infinie de son centre de tendance; & c'est là, en effet, ce que l'on suppose, lorsque l'on détermine le rapport de ces forces, à l'égard d'un arc *AB* (*Fig.* 4), supposé infiniment petit, puisqu'alors cet arc devient, ainsi qu'il a été prouvé, un véritable arc de parabole; l'équation $y^2 = ax - x^2$, se réduisant alors à $y^2 = ax$, qui est l'équation à un arc de parabole; & dès-là les tendances du corps étant parallèles ne coincideroient que vers un centre infiniment éloigné. Donc alors la force centripète *AN*, devient infiniment petite, à l'égard de la force de projection *AD*. Quand on détermine donc le rapport de la vîtesse *AD*, avec la force centripète *AN*, relativement à un arc *AB*, supposé infiniment petit, l'arc circulaire se trouve alors transformé en un arc de parabole, & le centre de tendance devient infiniment éloigné. La force centripète du

corps eſt donc alors néceſſairement infiniment petite : mais il eſt évident que cette force devient finie, quand le centre de peſanteur ſe trouve dans un point *C*, placé à une diſtance finie du corps *A*; & qu'ainſi cette force ne peut plus avoir qu'un rapport fini avec la force de projection *A D*, du corps.

Il eſt donc de la derniere fauſſeté de prétendre qu'un corps de dimenſions finies, qui circuleroit à une diſtance finie de ſon centre de peſanteur, *n'auroit jamais qu'une force centripète infiniment petite, par rapport à ſa force de projection, où à ſa vîteſſe.* L'abſurdité de cette propoſition ſaute aux yeux, & ſe manifeſte par ſon ſeul énoncé ; car on ſent que quand le globe terreſtre, par exemple, ne peſeroit qu'une livre ſur le ſoleil, cette peſanteur auroit encore un rapport fini avec ſa force de projection, bien loin d'être infiniment petite, à l'égard de cette dernière force. Il n'eſt pas difficile de prouver tout ce que l'on veut à l'aide de cette foule de principes erronés de nos Géomètres Newtoniens. S'il eſt donc démontré, comme il l'eſt en effet, que la force centripète ne peut avoir qu'un rapport fini avec la force de projection d'un corps

de dimenſions finies qui circuleroit à une diſtance finie de ſon centre de peſanteur; il s'enſuit inconteſtablement, par l'aveu même des Géomètres Newtoniens, que le corps, *à chaque inſtant*, circulant ſans s'appuyer ſur des orbites matérielles, *s'écarteroit de la direction précédente d'un angle fini, ce qui le feroit tomber dans le centre des forces, au bout de quelques inſtans*, & en conſéquence que ce n'eſt point ainſi que les corps du ſyſtême ſolaire feront mûs, mais en s'appuyant ſur des orbites matérielles, ſur leſquelles ils feront leur révolution, ce qui les empêchera *de tomber dans le centre des forces*.

Soit donc une orbite matérielle *ANDMA*, de forme elliptique; *F*, le foyer de cette orbite, en même tems centre de peſanteur d'un corps *A* (*Fig.* 26): ſi on vient à imprimer à ce corps un mouvement de projection de *A* en *B*, capable de le faire ſortir du point *A*; ce corps dans un tems *t*, ira de *A* en *Q*; dans un ſecond tems *t*, il décrira l'arc d'ellipſe *QN*, enſuite les arcs *NS*, *SD*. Mais ce corps, en deſcendant de *A* en *N*, ſera mû d'un mouvement accéléré, puiſqu'il ſeroit toujours plus près de ſon centre *F*, de tendance; enſorte que parvenu en *D*, il auroit acquis une vîteſſe,

qu'il ne pourroit perdre qu'en autant de tems qu'il auroit employé à l'acquérir, & qui le rameneroit par conſéquent de *D*, au point *A*, du départ, dans le même tems préciſément qu'il auroit employé à aller de *A* en *D*, ſon mouvement étant autant retardé qu'il avoit été accéléré en deſcendant de *A* vers *D*. Dans le cas où ce mobile ſeroit de forme ſphérique, il ſera animé en même tems d'un mouvement de rotation, comme les corps planétaires, ainſi qu'il a été obſervé ; & dans le cas ou la forme ſeroit irréguliere, telle que celle des comètes, le corps, par le ſeul effet de ſa peſanteur, gliſſera, au lieu de rouler, ſur la circonférence *ANDMA*, de l'orbite matérielle : car il eſt manifeſte que ce corps, une fois ſorti du point *A*, ne pourroit reſter fixe ſur aucuns points *Q*, *N*. . . &c. de l'ellipſe *ANDMA*, puiſque ſa tendance *QF*, *NF*. . . &c. le feroit néceſſairement rouler ou gliſſer ſur la circonférence de cette même ellipſe. On voit par-là que les corps qui circuleroient ſur la circonférence d'une ellipſe plus excentrique, & dont le grand axe *AD*, ſeroit plus grand, doivent avoir une très-grande vîteſſe vers le point *D*, de leur périhélie, comme il arrive aux comètes.

On voit aussi que ces corps peuvent tourner dans tous les sens possibles, puisqu'il suffiroit que le mouvement de projection *A B*, leur fût imprimé suivant la direction quelconque des orbites matérielles, sur lesquelles ces corps feroient leur révolution.

Si l'on supposoit enfin que les surfaces, tant des corps circulans, que des orbites matérielles, fussent infiniment polies, ensorte que le frottement du corps circulant, contre la surface de l'orbite matérielle, pût être considéré comme nul, ou à peu près; il est clair que la vîtesse du corps seroit sensiblement la même d'une révolution à une autre révolution; & qu'ainsi les corps du systême solaire pourroient faire un très-grand nombre de révolutions sur ces orbites, sans que leur mouvement en parût altéré.

Telle est la maniere de concevoir le mouvement de révolution des corps du systême solaire, & la seule que la Géometrie puisse avouer; à laquelle on est conduit par une suite de principes rigoureusement démontrés, qui mettent dans le plus grand jour, & l'extrême simplicité de ces mouvemens, & la foule de propositions fausses & absurdes, dont M. Newton, & ses

ſes diſciples après lui n'ont ceſſé de faire uſage pour étayer le ſyſtême d'une gravitation univerſelle, dont tout décele le ridicule, & l'abſurde.

Pluſieurs Géomètres ont remarqué, même depuis long-tems, que la force de projection *AB*, ne pouvoit tout au plus que ſuſpendre pour un tems la chûte du corps *A*, dans ſon centre *F*, de tendance, lorſque le corps circuleroit ſans être ſoutenu, & que le corps devoit toujours finir par être ramené au centre de peſanteur *F*, dans un tems plus long, ou plus court; ſoit par la droite *AF*, dans le cas, où il ſeroit abandonné à l'action de ſa ſeule gravité, & privé de toute action tangentielle *AB*; ſoit par une courbe, plus grande ou plus petite *ANSF*, qui ne pouvoit être qu'une ſpirale, dans le cas où la force de la gravité *AF*, ſe compliqueroit avec une force par la tangente *AB*. La propoſition de ces Auteurs eſt certainement inconteſtable, mais ils ne l'ont pas ſuffiſamment démontrée; cette propoſition n'eſt vraie que parce que le mouvement tangentiel *AB*, imprimé dans l'origine du mouvement, doit décroître à tout inſtant par l'action de la gravité, ce qui doit incliner toujours davantage la direction *AB*,

QP, *NT*.... &c. de ce mouvement sur le rayon vecteur *AF*, *QF*, *NF*.... &c. par conséquent accroître la force centripète du corps, & diminuer d'autant sa force centrifuge. Ainsi la force centripète du corps, ayant augmenté, en tems égal, de *A*, vers *Q*, *N*, *S*.. &c, & les rayons vecteurs ayant toujours diminué, ainsi que la force centrifuge du corps, il est évident que le corps ne pourroit que parvenir au centre *F*, de pesanteur, puisque l'accroissement progressif de force centripète détruiroit toute force centrifuge, & que dès-lors le corps ne pourroit remonter vers *A* au-dessus du centre *F*, de pesanteur, par l'excès de sa force centrifuge sur sa force centripète, comme il seroit nécessaire; puisque cette premiere force, loin de surpasser la premiere, seroit détruite par elle. Voilà la véritable cause de la chûte de tout mobile vers son centre *F*, de pesanteur, lorsque ce mobile seroit supposé circuler autour de ce centre, sans être soutenu. Sur quoi il convient encore d'observer qu'il ne seroit pas toujours vrai que le corps décriroit une courbe, depuis le point *A*, d'où il seroit parti, jusqu'au centre *F*, de pesanteur, où se termineroit son mouvement, parce qu'il pourroit

arriver que la force de la gravité eût détruit la totalité du mouvement de projection, dans quelque point *Q*, ou *N*, de la courbe décrite *AQN*, & dès-lors le corps tomberoit de *Q*, ou *N*, dans ſon centre *F*, de tendance, par la ligne droite *QF*, ou *NF*, après avoir décrit les arcs *AQ*, ou *AN*. Il eſt évident que ce cas auroit lieu toutes les fois que la force de projection *AB*, ne ſeroit pas imprimée en proportion de la diſtance où le corps *A*, ſeroit de ſon centre *F*, de peſanteur, mais en moindre degrés. On voit qu'alors ce mouvement ſeroit détruit dans quelque point *Q*, ou *N*, de la courbe, & avant que cette courbe fût arrivée au centre *F*, de tendance. Par exemple, une pierre *A*, lancée avec la main, dans la direction de la tangente *AB*, & tendant vers le centre *F*, de la terre dont elle ſeroit diſtante d'environ quinze cent lieues, ne pourroit évidemment décrire que quelques arcs de courbe *AQ*, *AN*, & pendant les premiers inſtans de ſon mouvement ; le mouvement par la tangente *AB*, étant bientôt détruit par l'action de la peſanteur de la pierre, & par le décroiſſement conſidérable des angles *FAB*, *FQP*, *FNT*. . . &c ; la pierre, après avoir

parcouru les arcs *AQ*, ou *AN*, étant privée de tout mouvement de projection, tomberoit en ligne droite vers son centre *F*, de pesanteur, si ce globe se trouvoit percé jusqu'à son centre *F*, dans le lieu où la pierre atteindroit la terre. Afin donc que la courbe décrite pût s'étendre jusqu'au centre *F*, de pesanteur du corps, il est manifeste qu'il faudroit considérablement augmenter le mouvement de projection *AB*, de la pierre, (*Fig.* 27) en supposant que ce mouvement fût tel, par exemple, que la pierre pût parcourir une tangente *AT*, d'un mouvement uniforme, & égale à la demi-circonférence d'un cercle *ADB*, dans un tems *t*, égal à celui qu'employeroit la pesanteur à lui faire décrire, d'un mouvement également uniforme, le rayon *AC*, du demi-cercle *ADB* : il est clair que la courbe décrite seroit la spirale *AEMNC*, puisque la pierre n'ayant point de force centrifuge, par la diminution en *E*, *M*, *N*.... &c. de l'angle formé par la tangente & le rayon vecteur, rien n'empêcheroit le mobile de couler sur le rayon qui décroîtroit par conséquent de *A*, vers *E*, *M*, *N*.... &c., jusqu'au centre de pesanteur *C*, où il finiroit par s'anéantir.

Si donc la pierre, ou corps quelconque *A*, décrivoit une ſpirale *AEMNC*, dans le cas où ſa force de projection *AT*, ſeroit imprimée de telle ou telle ſorte; il s'enſuit que la même nature de courbe ſeroit toujours décrite par le mobile, qu'elle que pût être ſuppoſée la force de projection *A T*, plus grande, ou plus petite; puiſque le plus ou le moins de force de projection ne pourroit avoir d'autre effet que de faire décrire des arcs de ſpirale plus longs, ou plus courts, en tems égal: & delà il s'enſuit que les arcs *AE*, *AM*... &c. décrits par des corps quelconques lancés de deſſus la ſurface, par exemple, de la terre, ne ſont, & ne peuvent être au fonds que des arcs de ſpirale, & nullement des arcs de parabole; car le mouvement parabolique ſuppoſe deux choſes; 1°, que la diſtance du corps à ſon centre de peſanteur ſeroit infinie, ce qui eſt une ſuppoſition chimérique; 2°, que le mouvement de projection du corps ſeroit toujours le même, & ne ſeroit pas diminué par l'action de la gravité, ce qui n'eſt pas moins chimérique au fonds; retranchons ces deux chimères. Que le centre de tendance, ſoit ſuppoſé à une diſtance finie du corps, & que le mouvement tangentiel décroiſſe,

en tems égal par l'action de la gravité ; & le mouvement parabolique sera transformé en mouvement spiral ; puisque les tendances coïncideroient vers un centre *C*, placé à une distance finie du corps *A*, & que les rayons vecteurs *CA*, *CE*, *CM*... &c. loin de croître, décroîtroient au contraire en tems égal, jusqu'à finir par s'anéantir au centre *C*, de pesanteur du corps. Mais comme la force de la pesanteur se change en force accélératrice, lorsque le corps tombe vers son centre de tendance, & qu'il cesse d'être soutenu, l'on voit que la courbe *AobfC* que décriroit le mobile seroit une spirale, engendrée par la combinaison de deux mouvemens uniformément accélérés ; l'un par le rayon qui feroit parcourir au corps les espaces *do*, *eb*, *af*, *BC*, proportionnels aux quarrés des tems employés à les parcourir ; & l'autre angulaire qui lui feroit décrire, dans les mêmes tems, les angles *Acd*, *Ace*, *Aca*. . &c, dont les arcs *Ad*, *Ae*, *Aa*. . &c. seroient la mesure, lesquels angles seroient également proportionnels, ainsi que leur mesure, aux quarrés des mêmes tems.

Telle est donc, dans le fait, la courbe que décriroit tout mobile *A*, qui circule-

roit, ſans être ſoutenu, autour de ſon centre *C*, de peſanteur; ce qui démontre de nouveau que les corps du ſyſtême ſolaire ne peuvent circuler autour du ſoleil, leur centre commun de peſanteur, qu'en roulant ou gliſſant ſur des orbites elliptiques & matérielles, comme il vient d'être dit.

Si l'on conſulte enſuite les Obſervations, l'on verra que ces orbites matérielles ſont les ſeules qui puiſſent être ſuſceptibles de mouvemens, de nœuds, d'inclinaiſons, de variations; puiſque ſi ces orbites étoient de ſimples lignes mathématiques, elles n'auroient aucune exiſtence phyſique, & que dès-là il ſeroit impoſſible de rendre raiſon des mouvemens, des nœuds, des inclinaiſons, & des différentes variations qu'on peut leur attribuer pour expliquer les phénomènes céleſtes; d'autant plus qu'on eſt toujours forcé de ſuppoſer ces mouvemens dans les orbes des planètes, ſecondaires ſur-tout, comme la lune; & que ce n'eſt que par inconſéquence, qu'on n'en conclut pas leur matérialité, & par conſéquent leur exiſtence phyſique. En faiſant donc rouler ou gliſſer les corps du ſyſtême ſolaire ſur des orbites matérielles, ſuſceptibles par conſéquent par elles-mê-

mes de mouvemens, de nœuds, d'inclinaiſons & de différentes variations, tous les phénomnèes céleſtes s'expliquent d'une maniere fort ſimple, & fort géométrique; puiſqu'il en réſulte un mouvement de révolution autour de tous les centres de tendance, un mouvement de rotation en même tems de la part de tous les corps circulans, dont la forme ſeroit ſphérique; & des nœuds, des inclinaiſons, & différentes variations, dans les orbes des planètes ſecondaires qui ſont toujours mues autour de deux centres; ſavoir, le ſoleil, & leur planète centrale.

II. Remarque.

Quoiqu'il ſoit permis en Géometrie de conſidérer les courbes comme des poligones d'une infinité de côtés infiniment petits; il eſt néanmoins facile de prouver que cette idée, qui n'eſt au fond qu'une ſimple hypothèſe admiſe principalement dans la méthode de la rectification des courbes, ne peut avoir lieu, lorſqu'il s'agit de leur génération réelle & phyſique, & de leur deſcription par le mouvement des corps de dimenſions finies. En effet, ſoit la courbe *ACN* (*Fig.* 28), conſidérée comme

poligone, & ſuppoſée décrite par un corps *A*, de dimenſions finies, en vertu d'une force centrale *AF*, tendante vers un même point *F*, combinée avec un mouvement *AM*, dans la direction de la tangente *ABM*. La courbe étant ſuppoſée poligone, le petit arc *AC*, pourra être conſidéré comme rectiligne, & par conſéquent, comme produit par la combinaiſon de deux impulſions *AB*, *AD*, dont l'effet ſeroit de faire décrire au corps *A*, la diagonale *AC*, du parallélogramme *ADBC*; & comme il en ſeroit de même à tous les angles du poligone, il s'enſuit que la force centrale *AF*, qui eſt de ſa nature une force continue, qui agiroit continuellement ſur le mobile, & ſans diſcontinuation, même pendant le cours d'un tems infiniment court, réduiroit ſon effet à des impulſions *AD*, ſucceſſives, ſéparées entr'elles par de petits eſpaces de tems; enſorte que le corps ne recevroit au commencement de chaque petit tems *t*, qu'une ſimple impulſion, au lieu d'une ſomme infinie de petites impulſions que la force centrale lui communiqueroit, en effet, dans le cours du même tems *t*. Ainſi l'hypothèſe d'une force centrale qui n'agiroit ſur le corps qu'à chaque angle du poli-

gone infini-latéral, & qui suspendroit son action pendant tout le tems qu'il employeroit à décrire chaque côté de ce poligone, est en soi fausse, & contraire à la nature d'une force continue, qui ne peut être conçue mettre la plus petite interruption dans son action.

De cette hypothèse fausse en soi, résultent plusieurs autres faussetés ; savoir, la premiere, de transformer en force uniforme, qui feroit parcourir au corps des espaces *AD*, proportionnels au tems t, employé à les décrire, une force de sa nature accélératrice constante, qui feroit parcourir, dans le même tems t, des espaces *AD*, proportionnels au quarré t^2, du même tems, employé à les décrire. Ce qui fait une énorme différence, tant dans les espaces parcourus, que dans leur rapport avec les tems employés à les parcourir ; & la seconde, de faire modifier, ce qui est absurde, à chaque instant infiniment petit, la force finie *A B*, dans la direction de la tangente, par l'action *A D*, d'une force centrale infiniment petite ; car à l'origine de la courbe, *AD*, est infiniment petite, à l'égard de *A B* ; mais l'effet d'une force centrale *A D*, infiniment petite, à l'égard d'une force finie *AB*, est à chaque instant

nul à l'égard de cette force finie, précisément comme le feroit l'impulsion centrale d'une puce, sur le globe *A*, de la terre emportée, dans la direction de la tangente *A M*. Il est clair que l'impulsion centrale de cette puce, répétée même à chaque instant infiniment petit, ne produiroit aucun effet sur le globe terrestre *A*, entraîné par une force finie dans la direction de la tangente *AM*, & que la terre poursuivroit son chemin, dans la direction rectiligne de cette tangente, si elle ne recevoit à chaque instant que l'impulsion centrale de cette puce, ou, ce qui revient au même, si l'impulsion centrale qui devroit la détourner de sa direction rectiligne *ABM*, étoit, à chaque instant, infiniment petite à l'égard de l'impulsion par la tangente *A B M*; afin donc que la terre puisse être détournée de la direction de cette tangente, c'est une nécessité, que les deux forces soient en rapport fini. Que si l'impulsion par la tangente lui faisoit parcourir un espace, par exemple, *A B*, dans un tems *t*; l'impulsion centrale pût lui faire parcourir, dans le même tems, un espace *A D*, qui seroit en rapport fini avec l'espace *A B*; dès-lors la terre, par ces deux impulsions com-

binées, parcourroit la diagonale *A C*, du petit parallélogramme *A B C D*, & par conséquent, quitteroit à la fin de chaque tems *t*, la direction de la tangente *A B* : voilà comment la terre seroit à tout instant retirée de la direction de cette tangente, par l'effet d'une impulsion centrale *A D*, qui seroit en rapport fini avec l'impulsion tangentielle *AB*; mais alors la terre ne décriroit point une courbe, parce que dès que *A B* & *A D*, seroient en rapport fini, ce globe, à la fin de chaque tems *t*, s'éloigneroit nécessairement de la direction de la tangente *A B M*, de la valeur d'un angle fini *B A C*, ce qui le feroit même bientôt tomber dans le centre *F*, des forces. D'où il suit clairement qu'un corps ne peut jamais décrire une courbe, considérée comme poligone d'une infinité de côtés, par l'effet de deux impulsions *A B*, *A D*, dont l'effet seroit de lui faire parcourir la diagonale, ou petit côté *AC*, de la courbe; car ou *AD* sera en rapport infini, avec *A B*, ou en rapport fini. Dans le premier cas, la force centrale étant, à tout instant, infiniment petite, à l'égard de la force tangentielle *AB*, ne pourroit la modifier; son effet étant nul à tout instant, le corps seroit emporté

dans la direction de cette tangente *ABM*; & dans le second cas, les deux forces *AB*, *AD*, étant en rapport fini, le mobile, à la fin de chaque tems infiniment petit *t*, s'écarteroit, de la valeur d'un angle fini *BAC*, de la direction de la tangente *ABM*, & par conséquent ne pourroit encore décrire une courbe. Ainsi rien de plus faux que la génération des courbes *ACN*, considérées comme poligones d'une infinité de côtés, & supposées décrites par l'action de deux forces combinées *AB*, *AD*, qui seroient toutes les deux uniformes, pendant le cours de chaque instant *t*. Un corps ne peut donc décrire qu'une courbe rigoureuse, & non poligone par l'action de la gravité, compliquée avec une force de projection. On voit même, à l'inspection de la figure, que le parallélogramme *ADBC*, ne peut avoir lieu, lorsque la force centrale *AD*, sera exprimée comme elle doit l'être, comme une force continue, accélératrice, au lieu de l'exprimer comme une force uniforme qui feroit décrire au corps uniformément l'espace *AD*, tandis que la force tangentielle lui feroit parcourir uniformément l'intervalle *AB* : il est clair que dès que l'espace *AD*, sera considéré,

comme on le doit, comme décrit d'un mouvement accéléré, dès-lors le parallélogramme *ADBC*, ne peut subsister, & l'on ne peut plus dire que l'arc *AC*, de la courbe, en seroit la diagonale ; car l'espace *AB*, étant comme le tems t, & l'espace *AD*, comme le quarré t^2, du même tems, l'on voit qu'il devient absurde de prétendre que l'on aura un parallélogramme, formé d'un côté *AB*, exprimable par t, & d'un côté *AD*, exprimable par t^2, comme on l'a déja observé.

On part d'ailleurs ici d'un principe faux, en supposant, comme font les Newtoniens, que *ce n'est jamais que par degrés que les forces produisent leurs effets*. L'effet par lequel la force centrale détourne, à tout instant, le corps de la direction de la tangente n'est pas produit par degrés, mais tout à la fois, & dans un instant indivisible. Or, le corps à détourner ayant à tout instant une force finie dans la direction de la tangente, ne pourra évidemment être détourné de cette direction que par une force de même nature. Ce détour, dans un instant infiniment petit, ne fût-il que de l'épaisseur d'un cheveu, la force qui le produiroit seroit toujours en rapport fini avec la force tangentielle.

Ce n'eſt donc pas de cette ſorte que le mouvement d'un corps, autour d'un point fixe, doit être engendré. Il faut concevoir que de la force tangentielle *ABM*, réſulte une force centrifuge *OB*, (*Fig.* 29), qui eſt en oppoſition avec l'action *od*, de la gravité, & dans la direction d'une même ligne droite *BodF*; enſorte que le corps *A*, étant toujours mû entre les deux forces contraires *OB*, *od*, comme il a été déja obſervé, ne pourroit ſuivre la direction de la tangente *ABM* qu'autant que la force centripète *od*, ſeroit infiniment petite à l'égard de la force centrifuge *OB*; parce qu'alors cette premiere force étant comme nulle à l'égard de la ſeconde, ſon effet *od*, ſeroit nul à l'égard de l'effet *OB*. Donc alors le point *O*, parviendroit en *B*, & par conſéquent, le mobile, au lieu de décrire l'arc *AO*, parcourroit la tangente *AB*.

Mais dans le cas où les forces centrifuge & centripète *OB*, *od*, ſeront en rapport fini, il eſt clair que le mobile doit être retiré à tout inſtant de la direction de la tangente *ABM*, & qu'il parviendra dans quelque point *O*, hors de la tangente *ABM*; & ce point *O*, ſera d'autant plus diſtant de cette tangente, que la force cen-

tripète *o d*, feroit plus grande que la force centrifuge *O B*, & réciproquement. Dans le cas de l'égalité des deux forces, le corps décriroit un cercle : & en effet, nous avons démontré que dans ce cas $OB = Ae$. Telle eft la maniere de concevoir le mouvement curviligne d'un corps autour d'un point fixe *F*, centre de pefanteur d'un corps *A*, qui exclut toute idée de poligone d'une infinité de côtés, & toute idée de parallélogramme *A e B o*. L'on doit donc entendre qu'un corps *A*, pefant à tout inftant fur fon centre *F*, de gravité, décrira néceffairement une ligne courbe, lorfqu'il viendra à être frappé par une force *ABM*, à caufe qu'il fera mû entre deux forces, dont les directions *OB*, *o d*, feroient en fens contraire, & qui feroient encore en rapport fini entr'elles. Le corps alors, pour obéir à l'action contraire de ces deux forces, qui agiront fans interruption fur lui, fera néceffité de quitter à tout inftant la direction de la tangente *ABM*, qu'il tendoit à parcourir, ou, ce qui revient au même, le mouvement rectiligne & tangentiel *ABM*, fera, par l'effet de ces deux forces, transformé en mouvement curviligne *A o N*, précifément comme il arriveroit, fi le corps

corps *A*, étoit lié à un fil *AF*, fixement attaché au point *F*, & qu'une main en *A*, tînt toujours le fil tendu. Le corps & la main dans cet état, étant frappés dans la direction de la tangente *ABM*, l'on voit évidemment qu'ils décriroient nécessairement une courbe, autour du point *F*, centre de mouvement du corps. On peut concevoir que la main seroit toujours à la même distance du centre *F*, & alors le corps décriroit un cercle; ou qu'elle glisseroit sur le fil, ou rayon *AF*, soit en s'éloignant, ou en se rapprochant du centre *F*, en tenant toujours le fil tendu; & dans ces cas, la courbe décrite ne seroit point un cercle, mais la courbe couperoit toujours l'axe *AFP*, dans quelque point, *P*, plus près ou plus loin du centre de mouvement *F*: ce qui démontre encore de nouveau que cette même courbe ne pourroit être ni une parabole, ni une hyperbole, ni aucune espece de courbes, non rentrantes en elles-mêmes, puisque le mouvement angulaire du corps le rameneroit toujours vers l'axe *AFP*, de la courbe, soit que le rayon vecteur *AF*, allât en croissant en tems égal, ou en décroissant.

De cette génération exacte du mouve-

ment curviligne, ſuivent pluſieurs conſéquences; ſavoir, que toutes les propoſitions ſur les forces centrales, déduites de l'hypothèſe de courbes poligones, ſuppoſées décrites par un corps de dimenſions finies, ſont abſolument fauſſes, & ſpécialement celle-ci, qu'on trouve dans la plupart des ouvrages qui traitent de ces forces; ſavoir, *que ſi un corps eſt mû le long d'une courbe, le changement de direction qu'il eſt obligé de faire à chaque côté infiniment petit de la courbe ne lui fait perdre de ſa vîteſſe qu'une quantité infiniment petite du ſecond ordre* (a).

La démonſtration qu'on donne de cette propoſition eſt appuyée ſur deux hypothèſes fauſſes. La premiere, ſur l'idée peu exacte en cette occaſion, de la génération d'une courbe, conſidérée, non point comme courbe rigoureuſe, mais comme poligone d'une infinité de côtés; & la ſeconde, ſur la ſuppoſition abſurde qu'une force centrale *Ae*, infiniment petite, à l'égard d'une force de projection finie *AB*, peut modifier à tout inſtant cette derniere force, & retirer le mobile de la direction de la tangente *AB*.

(*a*) Leçons élémentaires de Méchanique, par M. l'Abbé de la Caille, de l'Académie Royale des Sciences, *p.* 137.

Mais il résulte de la maniere exacte, dont nous avons expliqué le mouvement d'un corps, autour d'un point fixe, que les forces centripète & centrifuge *o d*, *oB*, sont en opposition, & en rapport fini entr'elles. D'où il suit qu'à la fin de chaque instant infiniment petit *t*, la force de la gravité *o d*, a toujours détruit une somme de forces centrifuges *O B*, qui auroient concouru à la génération de l'arc *A o*; mais l'arc *A o*, étant infiniment petit du premier ordre, les petites lignes *o d*, *O B*, seront des infinimens petits du second ordre. Donc la force centrale, à la fin de la génération d'un arc infiniment petit *A o*, aura détruit une somme infinie de petites quantités *o B*, du second ordre : par conséquent, la somme infinie des petites quantités détruites *o B*, sera du même ordre que l'arc *A o*, décrit, à la fin du tems *t*; c'est-à-dire, que la somme des forces centrifuges détruites, dans un tems *t*, infiniment petit, sera une quantité infiniment petite du premier ordre, & par conséquent, dans un tems *T*, fini, la somme des forces centrifuges détruites, sera une quantité finie.

Delà il suit qu'à la fin d'un tems *T*, fini, plus ou moins long, la force de la gravi-

té aura totalement détruit la force de projection *ABM*, & que par conséquent, le corps parviendra au centre *F*, de pesanteur. Donc la courbe décrite, par tout corps qui circuleroit autour de son centre *F*, de pesanteur, sans être soutenu que par sa force centrifuge, à supposer même qu'elle eût toute la longueur dont elle pourroit être susceptible, ne seroit jamais qu'une spirale qui rameneroit le mobile à son centre de mouvement & de pesanteur.

Par conséquent tout ce qui a été écrit jusqu'ici sur les loix des forces centrales, & sur les courbes supposées décrites par des corps de dimensions finies, autour de leur centre de pesanteur, est faux & erroné ; puisque la seule courbe que ces corps peuvent décrire, quand ils ne seront soutenus au-dessus de leur centre de tendance que par leur force centrifuge, est nécessairement une spirale, & non point un cercle, ni une ellipse, ni encore moins une parabole, une hyperbole... &c. comme on l'a dit.

Si un corps *A* (*fig.* 28), pesant à tout instant sur son centre *F*, de tendance, est abandonné à lui-même, & à l'action de sa seule gravité ; il est clair qu'il parviendra au centre

par la ligne droite *A F*; dans le cas où ce corps recevroit un mouvement tangentiel *ABM*, qui se compliqueroit avec l'action de la gravité, il n'arrivera plus au centre par une droite *AF*, mais par une ligne courbe *ACF*: car il est évident que le mouvement tangentiel *ABM*, ne peut produire d'autre effet sur le corps *A*, que celui de le ramener au même point *F*, où il tendroit toujours par une autre route seulement que celle qu'il auroit tenue, si ce mouvement ne lui avoit pas été appliqué. Donc la courbe décrite par ce corps, ne pourroit être qu'une spirale.

L'action tangentielle doit toujours opérer deux effets sur le corps; le premier, de le soutenir au-dessus du centre de pesanteur, par un effort *oB*, égal & opposé à celui de la gravité *od* (*fig.* 29); & le second, de lui communiquer un mouvement de translation. Or le premier de ces effets ne peut être produit qu'aux dépens du second; comme on voit qu'il arrive à un homme qui porte un fardeau, dont le mouvement de translation diminue toujours, à proportion qu'il le porte plus long tems, ou plus loin. L'action tangentielle peut donc être considérée comme une force qui porteroit un poids, autour du

centre de peſanteur du corps, & qui par conſéquent doit diminuer, & finir même par s'anéantir, lorſque le poids porté auroit parcouru un certain eſpace. Il eſt évident que cet eſpace ſeroit d'autant plus long que le poids du corps ſeroit ſuppoſé moindre, relativement à la force tangentielle; & qu'afin que l'eſpace parcouru pût être infini, il faudroit que le poids du corps fût infiniment petit. Mais comme le poids des corps de dimenſions finies, eſt fini de ſa nature; il s'enſuit que l'action tangentielle, qui eſt également finie, portant un poids fini, autour du centre de peſanteur, ne peut qu'en être affoiblie à tout inſtant, & finir même par être totalement anéantie. Donc un corps de dimenſions finies ne pourroit jamais décrire, autour de ſon centre de peſanteur, qu'une courbe, ſur laquelle le mouvement du corps ſeroit anéanti; & ce mouvement devant ſe terminer au centre de tendance, il eſt manifeſte que la courbe décrite ne pourroit être qu'une ſpirale.

On peut même déterminer l'époque à laquelle la force de la gravité auroit détruit le mouvement de projection du corps; puiſque cette époque eſt celle où les deux forces, faiſant parcourir au même corps,

le même espace, dans le même tems, seroient égales; car considérant l'action tangentielle, comme une force centrifuge, diamétralement opposée à l'action de la gravité, il est clair que celle-ci doit détruire celle-là, au moment où elle lui sera égale, & qu'elle feroit décrire au même corps, un espace égal, dans le même tems; puisque les deux forces étant égales, & en sens contraire, se détruiroient respectivement. Cela supposé:

Qu'un corps *A* (*fig.*30), tendant à décrire un cercle *AENBA*, autour de son centre *C*, de pesanteur, soit supposé devoir décrire un arc *AN*, égal au diamètre *AB*, de ce cercle. Je dis qu'alors les deux forces seront égales, & qu'étant en sens contraire, la force de la gravité doit détruire la force de projection *AD*, du corps. En effet, nous avons vu qu'en nommant c, l'arc décrit par le corps; r, le rayon du cercle, l'expression générale de la force accélératrice du corps, ou l'espace qu'elle lui feroit parcourir, dans le tems employé à décrire l'arc c, étoit toujours, & dans tous les cas: $\frac{c^2}{2r}$.

Mais l'arc *AN*, n'est jamais que la tangente *AD*, qui, par l'effet de la gravité,

ſe ſeroit courbée pour prendre la forme circulaire AN. L'on aura donc $AD = AN = c = 2r$; par conſéquent, ſubſtituant $2r$ à c, dans l'expreſſion générale $\frac{c^2}{2r}$, de l'eſpace que la force accélératrice feroit parcourir au corps, l'on aura, pour valeur de l'eſpace parcouru, dans le cas préſent, $\frac{c^2}{2r} = \frac{4rr}{2r} = 2r = AB = AN = AD$; c'eſt-à-dire, que, dans ce cas, l'eſpace AD, que feroit parcourir au corps A, l'action tangentielle, feroit égal à l'eſpace AB, que la force accélératrice lui feroit décrire dans le même tems. Ces deux forces, réduites au mouvement uniforme, feroient donc égales, puiſqu'elles feroient parcourir le même eſpace AD, ou AB, au même corps, dans le même tems; & étant en ſens contraire, l'une centrifuge, & l'autre centripète; il eſt évident qu'elles ſe détruiroient. Donc la force de la gravité détruiroit toute la force de projection d'un corps, qui tendroit à décrire un cercle, au moment où ce corps feroit ſuppoſé décrire un arc AN, égal au diamètre AB, du cercle à décrire, puiſqu'à cette époque les forces contraires feroient égales. Il eſt donc de la derniere abſurdité de prétendre qu'un corps de dimenſions finies non

ſoutenu, puiſſe décrire un cercle, ou une ellipſe, une parabole, une hyperbole... &c. autour de ſon centre de peſanteur; car il s'enſuivroit delà que le mouvement du corps, par ces courbes, ſeroit infini; tandis que tout démontre qu'il ſe termineroit au centre de tendance, & même dans le cas des courbes fermées, qui ſont les ſeules qu'il pourroit décrire, avant que d'avoir achevé ſa premiere demi-révolution *ANB*.

Il n'y a donc point d'autre maniere de concevoir le mouvement des corps du ſyſtême ſolaire, que de les ſuppoſer rouler, ou gliſſer ſur des orbites phyſiques, de forme elliptique, à la maniere qu'il a été expliqué.

Il ſeroit aſſurément difficile de réfuter plus complétement les principes prétendus Mathématiques de M. Newton, ſur les loix des forces centrales, qu'on l'a fait dans le cours de cet Ouvrage; mais pour qu'on puiſſe mieux ſaiſir le véritable état de la queſtion, dans ces objets controverſés; l'on croit devoir encore expoſer l'enſemble de la méthode Newtonienne dans la détermination des loix attribuées à ces forces. Nous la tirerons de l'Hiſtoire des Mathématiques de M.

Montucla (*a*), où elle est clairement décrite, d'après M. Newton ; ce qui donnera lieu à quelques observations très-propres à confirmer la vérité des principes précédemment établis. On y part d'abord, comme M. Newton, de l'hypothèse que toute espece de courbes, fermées ou non fermées, peuvent être décrites autour d'un seul & même point fixe, par l'effet du mouvement angulaire d'un rayon vecteur, constant, ou variable, à l'extrémité duquel le corps est toujours supposé mû. On établit ensuite, toujours d'après M. Newton, & d'après cette hypothèse; 1°, Qu'en toute espece de courbes, les aires décrites par le rayon vecteur, sont proportionnelles aux tems employés à les décrire ; 2°, Que la vîtesse d'un corps qui décrit une courbe, est à chaque point, en raison réciproque de la perpendiculaire tirée du centre des forces sur la tangente à ce point ; 3°, Qu'en toute courbe la partie du rayon vecteur, prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente élémentaire, comprise entre la courbe & la tangente, est l'effet de la force centrale, & que c'étoit *du rapport & de la mesure de ce petit espace dans les différens points de la*

(*a*) II. Vol. *pag.* 410 & suivantes.

courbe que dépendoit la mesure de la force centrale dans ces différens points ; 4°, Que nommant e, ce petit espace ; s, l'aire ou secteur curviligne décrit dans le même tems par le rayon vecteur, l'intensité de la force centrale, dans les différens points de la courbe, étoit toujours proportionnel à $\frac{e}{s^2}$, c'est-à-dire, à l'espace e, parcouru, divisé par le quarré t^2, du tems ; ou du secteur curviligne s^2, qui lui étoit proportionnel : de maniere que $\frac{e}{s^2}$, étoit l'expression générale de l'intensité de la force centrale d'un corps qui décriroit une courbe quelconque autour d'un point, d'après M. Newton lui-même, dont M. Montucla expose les principes & les procédés.

En déterminant ensuite, dans chaque courbe en particulier, les grandeurs e, s, propres à ces courbes ; l'on détermine la loi de la force centrale $\frac{e}{s^2}$ qui leur convient, & c'est par-là que M. Newton, & tous ses Disciples après lui, ont trouvé, par cette formule, *qu'on peut varier de manieres différentes, en y faisant entrer le rayon de la développée*, que dans les trois sections coniques, dont il s'agit prin-

cipalement dans cet Ouvrage, la loi de la force centrale étoit, à chaque point de ces courbes, ſuppoſées décrites par leur foyer, en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur r, ou de la diſtance, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{r^2}$.

5°, On y rappelle enſuite le théorême de M. Huighens, ſur la vîteſſe avec laquelle le corps décriroit le cercle, qui eſt toujours égale à celle que le corps auroit acquiſe, après être tombé de la hauteur du demi-rayon du cercle décrit; & l'on ajoute que dans le cas où cette vîteſſe ſeroit moindre, ou plus grande, la courbe décrite ſera une ellipſe décrite par le foyer le plus éloigné du corps, dans le premier cas, & par le foyer le plus voiſin dans le ſecond. Que ſi cette vîteſſe eſt préciſément égale à celle que le corps auroit acquiſe, après être tombé de la hauteur du rayon entier, la courbe que le corps parcourra ſera une parabole, dont le foyer ſeroit placé à l'extrémité de ce même rayon, & dans le cas enfin où cette hauteur ſeroit plus grande que celle du rayon, le corps *décrira une*

(a) Ibid. *pag.* 414, 415, 416.

hyperbole d'autant plus évaſée que la hauteur ſeroit plus grande.

Telles ſont en ſubſtance les loix prétendues géométriques de M. Newton, ſur les forces centrales des corps, mûs d'un mouvement angulaire autour de leur centre de peſanteur, *qu'on ne peut révoquer en doute*, ſuivant le langage des plus célèbres Géomètres Newtoniens, *ſans ſe rendre coupable, aux yeux des perſonnes intelligentes dans la Géométrie & la Méchanique, d'une honteuſe précipitation pour ne rien dire de plus* (a).

Mais nous le demandons à M. Montucla lui-même : qu'il nous diſe qui eſt plus *coupable de la honteuſe précipitation*, dont il parle, ou de ceux qui prennent de ſimples hypothèſes pour *des vérités inconteſtables*, ou de ceux qui attaquent ces hypothèſes en elles-mêmes, & qui démontrent qu'on ne ſauroit les admettre ? De tout ce que nous venons d'extraire de l'ouvrage de M. Montucla, qui n'eſt que l'écho de M. Newton, dans cette partie de ſon ouvrage, d'ailleurs très-eſtimable, réſulte-t-il autre choſe que de ſimples hypothèſes, ſur leſquelles tous ſes raiſonnemens, & tous ſes calculs ſont

(a) Ibid. *pag.* 418.

fondés? La formule générale $\frac{e}{s^2}$, de la force centrale, porte-t-elle ſur d'autres fondemens que ſur ces deux hypothèſes; ſavoir, 1°, Que toute eſpece de courbes fermées ou non fermées, pourra toujours être décrite autour d'un point, à la maniere des courbes fermées & révolutives, par le mouvement angulaire d'un rayon vecteur, conſtant, ou variable; & en conſéquence, que dans toute eſpece de courbes, le petit eſpace e, pourra toujours être conſidéré comme l'effet de la force centrale, pendant le tems employé par le rayon vecteur à décrire l'aire, ou ſecteur curviligne s; 2°, Que ce même ſecteur s, pourra toujours être ſubſtitué au petit tems t, durant lequel il ſeroit décrit, par-là même qu'il lui eſt proporportionnel; ce qui eſt une ſeconde hypothèſe qui peut même n'être pas vraie dans tous les cas, comme nous le verrons bientôt. Mais ſuppoſons, pour un inſtant, que le mouvement angulaire ne doive point entrer dans la génération d'une courbe non rentrante en elle-même, comme nous l'avons ſi ſouvent démontré, nous demandons encore à M. Montucla ce que devient la formule $\frac{e}{s^2}$ de la force centrale,

dans le cas de la deſcription d'une courbe de cette eſpece ? Il y a donc bien plus de précipitation à prendre ces hypothèſes pour *des vérités démontrées*, qu'à les examiner en elles-mêmes, à l'effet de les admettre avec lumiere, & avec elles toutes les conſéquences qui en réſultent, dans le cas où on les trouveroit fondées, ou à les rejetter, comme nous faiſons, ſi on les trouve au contraire erronées, & déſavouées par une ſaine & exacte Géométrie.

Si nous examinons à préſent les réſultats que donne la formule générale $\frac{e}{s^2}$, de la force centrale, appliquée aux ſections coniques qui ſeroient ſuppoſées décrites par leur foyer ; il ne ſera pas difficile d'appercevoir combien cette formule eſt erronée, par le paralogiſme intolérable auquel elle conduit, & dont il eſt bien étonnant qu'aucun des Géomètres d'un ſi grand nom qui l'ont perpétuellement ſous leurs yeux, ne ſe ſoit apperçu. Ce paralogiſme eſt que dans deux points quelconques de la ſection décrite, les tems ſeroient en raiſon des rayons vecteurs ; c'eſt-à-dire, que les rayons vecteurs ſeroient toujours proportionnels aux

tems ; ce qui eſt de toute fauſſeté ; puiſqu'il s'en faut de beaucoup que les rayons vecteurs croiſſent ou décroiſſent comme les tems. Dans un tems, par exemple, double, ou ſous-double, triple, ou ſous-triple. . . . &c. les rayons vecteurs ne peuvent viſiblement ni croître, ni décroître dans ce rapport des tems. Et c'eſt néanmoins là le réſultat de la formule générale $\frac{e}{s^2}$, ou $\frac{e}{t^2}$, en ſubſtituant le tems à l'aire ou ſecteur curviligne s, qui lui eſt proportionnel. Et en effet, cette formule, dans les trois ſections coniques, finit par ſe transformer en $\frac{1}{r^2}$, puiſqu'on en conclut que la loi de la force centrale eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au foyer ; c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur r : mais en ramenant la formule générale $\frac{e}{t^2}$, à l'expreſſion $\frac{1}{r^2}$; il eſt évident que l'opération ſe termine à ſubſtituer l'unité à l'eſpace e, parcouru, & le quarré r^2, de la diſtance, ou du rayon vecteur, au quarré t^2, du tems ; ſubſtitution qui transforme la formule générale $\frac{e}{t^2}$, en l'expreſſion $\frac{1}{r^2}$. La ſubſtitution de l'unité à l'eſpace e, parcouru

couru ne contient rien de répréhenſible ; puiſqu'on peut toujours ſuppoſer qu'un premier eſpace e, décrit, dans un très-petit tems $\dot{t}$, ſeroit égal à l'unité ; mais en ſubſtituant le quarré r^2, de la diſtance, au quarré t^2, du tems, on ſuppoſe alors que le tems $\dot{t}$, durant lequel l'eſpace e, ſeroit décrit, ſeroit proportionnel à la diſtance r ; ſans quoi l'on n'auroit pas droit de ſubſtituer r^2 à $\dot{t}^2$; & dès-là la formule générale $\frac{e}{t^2}$ de la force centrale eſt démontrée fauſſe & abſurde, puiſqu'elle conduit au paralogiſme inexcuſable de rendre proportionnels le tems employé à décrire un eſpace e, & la diſtance r, au centre des forces. Cet argument eſt ſimple, clair, & ſans replique, puiſqu'il réſulte de la converſion de la formule générale $\frac{e}{s^2}$ de la force, en l'expreſſion $\frac{1}{r^2}$ de ſon rapport, exprimé par le rayon vecteur, ou par la diſtance r, au centre de tendance du corps.

Il eſt d'ailleurs évident que l'hypothèſe générale de M. Newton, d'une force centrale, variable en raiſon de quelque fonction des diſtances, ne pouvoit aboutir qu'à ce

paralogiſme, puiſque deux meſures différentes étoient, par cette hypothèſe, données à la même force; ſavoir : $\frac{1}{t^2}$, & $\frac{1}{r^2}$. En nommant 1, le premier eſpace e, parcouru dans un tems t, il eſt clair que l'intenſité de la force centrale, qui eſt toujours une force accélératrice conſtante, pendant le cours d'un tems infiniment court $\dot{t}$, eſt en raiſon de $\frac{1}{t^2}$; & comme, par l'hypothèſe même de M. Newton, la meſure de cette force, eſt encore en général en raiſon de quelque fonction de la diſtance, & dans les ſections coniques en particulier, en raiſon de $\frac{1}{r^2}$; dès-là le paralogiſme de la proportionnalité entre le tems t, employé à décrire un eſpace 1, & la diſtance r, du corps au centre de tendance; puiſqu'en effet cette force étant p, l'on aura : $p = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{r^2}$; d'où $t = r$. On peut prouver ce paralogiſme d'une autre maniere : que s, S, expriment deux aires ou ſecteurs curvilignes, décrites en tems inégal t, T, dans une même ſection conique; l'on aura, par la loi de la proportionnalité des aires

aux tems, cette analogie : $t : T :: s : S$, d'où : $t^2 : T^2 :: s^2 : S^2$. Nommons actuellement p, P, la force centrale du corps, aux deux points quelconques de la courbe où il décriroit les aires, ou ſecteurs s, S, l'on aura encore cette analogie : $\frac{e}{t^2} : \frac{E}{T^2} :: p : P$; puiſque l'intenſité de la force eſt toujours en raiſon composée de la directe de l'eſpace parcouru, & de l'inverſe du quarré du tems employé à le parcourir. Mais puiſque le réſultat de la formule générale $\frac{e}{t^2}$, donne, dans le cas ſuppoſé des trois ſections coniques, l'analogie : $p : P :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$; l'on aura encore cette autre analogie : $\frac{e}{t^2} : \frac{E}{T^2} :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Si l'on ſuppoſe actuellement que les eſpaces e, E, décrits en tems inégaux t, T, ſoient égaux, ce qui eſt toujours poſſible dans ce cas, l'on aura encore : $\frac{1}{t^2} : \frac{1}{T^2} :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$; d'où réſulteroit l'analogie $t : T :: r : R$; c'eſt-à-dire, que les tems ſeroient proportionnels aux rayons vecteurs, ce qui ne peut être. Donc il eſt faux que la force centrale, qui feroit même décrire par ſuppoſition l'une des trois

ſections coniques, pût jamais être dans ces courbes en raiſon doublée, & inverſe des rayons vecteurs. Où ſont donc *ces vérités démontrées, ces propoſitions inconteſtables qu'on ne peut révoquer en doute ſans ſe rendre coupable d'une honteuſe précipitation?* Il eſt aſſez ſingulier de voir réduire toutes ces déclamations, ces prétendues vérités, en pur charlataniſme, ſous lequel on maſque des erreurs notables.

Si nous cherchons encore à vérifier par une courbe telle que le cercle, qui pourroit véritablement être décrite d'un mouvement angulaire autour d'un point, dans les cas, & dans les ſuppoſitions dont il a été parlé, la légitimité de la ſubſtitution que l'on fait de l'aire, ou ſecteur curviligne S, au tems $\dot{t}$, employé à la décrire, on trouvera encore les procédés Newtoniens en défaut de ce côté; car il s'enſuivroit que la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, ſeroit, par la formule générale, $\frac{e}{s^2}$, en raiſon inverſe du double du cube du rayon de ce même cercle. En effet, quand le corps décrit un cercle, l'eſpace e, que la force centrale lui feroit décrire dans un

tems $\dot{t}$, infiniment petit, eſt toujours égal au quarré de l'arc C, décrit, diviſé par le diamètre $2r$, de ce cercle : l'on aura donc $e = \frac{c^2}{2r}$; mais l'aire, ou ſecteur curviligne S, eſt, dans ce cas, égale à $\frac{cr}{2}$; l'on aura donc $S = \frac{cr}{2}$, & par conſéquent,

$$S^2 = \frac{c^2r^2}{4} \text{ ; donc } \frac{e}{s^2} = \left\{ \frac{\frac{c^2}{2r}}{\frac{c^2r^2}{4}} \right\} = \frac{4c^2}{2c^2r^3} = \frac{2}{r^3}.$$

Il ſuivroit donc de cette formule que l'intenſité de la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle ſeroit en raiſon du double du cube du rayon, pris inverſement ; ce qui eſt certainement faux. Mais ſi à la place du ſecteur circulaire $\frac{cr}{2}$, nous prenons tout ſimplement l'arc décrit C, qui eſt auſſi proportionnel au tems $\dot{t}$, employé à le décrire ; la formule générale ne ſera plus $\frac{e}{s^2}$, mais $\frac{e}{\dot{t}^2}$, parce que nous n'aurons plus de ſecteur circulaire $\frac{cr}{2}$, à ſubſtituer au ſecteur général S, mais l'arc C, à ſubſtituerau tems $\dot{t}$. L'on aura donc, par cette ſubſtitution, $\frac{e}{t^2} = \frac{c^2}{2rc^2} = \frac{1}{2r}$.

c'eſt-à-dire, qu'alors la force centrale ſera, dans le cercle, en raiſon inverſe du diamètre de ce même cercle, ce qui eſt une loi bien différente de celle qui réſulteroit de la formule générale $\frac{e}{s^2}$, ſubſtituée très-mal à propos à la formule légitime $\frac{e}{t^2}$. Cette ſubſtitution eſt donc erronée; l'eſpace parcouru, en vertu de la force centrale, étant toujours un produit de la vîteſſe acquiſe, à la fin d'un tems, par la moitié de ce tems, s'exprime par une aire triangulaire, à cauſe que la vîteſſe acquiſe, & le tems s'expriment par une ligne. Ainſi l'eſpace décrit doit toujours être d'une dimenſion au-deſſus de la ligne, repréſentant le tems, ou la vîteſſe; puiſqu'il eſt lui-même un produit du tems par la vîteſſe. Or en exprimant le tems par l'aire, ou ſecteur curviligne *S*, d'une courbe, comme on le pratique dans les principes Newtoniens, il en arrive qu'on éleve le tems, qui devroit être repréſenté par une ligne droite, ou courbe, à la même dimenſion que l'eſpace parcouru, ou le produit du tems par la vîteſſe, ce qui ne peut que donner des réſultats faux, & conduire à l'abſurde; tant il eſt vrai que nos Géomètres Newtoniens entendent peu la

matiere des forces centrales, ſur laquelle néanmoins ils ſe croyent les premiers hommes du monde; mais pourſuivons.

Nous avons nous-mêmes établi, dans la ſeptième Obſervation, dans quel cas les forces accélératrices étoient entr'elles en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Cette loi a lieu à l'égard de deux corps qui décriroient différens cercles, autour d'un même centre de peſanteur, mais non point à l'égard d'un même corps décrivant une ſeule & même courbe, autour d'un même centre, telle, par exemple, que l'une des ſections coniques; car pour que la force centrale pût, dans ce cas, être dans ce rapport; il faudroit que dans tous les inſtans le corps tendît à décrire un cercle; que par conſéquent, la direction de la force de projection fût toujours perpendiculaire ſur le rayon vecteur, dans le même tems que ce rayon varieroit ſoit par accroiſſement, ſoit par décroiſſement: dès-lors le mobile, ſuivant la loi de différens corps qui décriroient différens cercles autour d'un même centre, puiſqu'il tendroit à tout inſtant à décrire la même courbe à différentes diſtances de ce centre, comme ces corps, auroit, dans tous les points de la courbe décrite, une force

centrale qui étant mesurée par des espaces décrits d'un mouvement uniformément accéléré, seroit en raison doublée & inverse de la distance au centre de tendance. Voilà dans quel cas le corps, supposé mû sur la circonférence d'une section conique, auroit une force centrale en raison inverse & doublée de la distance au centre des forces; mais comme ce cas est impossible, puisqu'il suppose que l'angle formé par la direction du mouvement tangentiel, & le rayon vecteur seroit constant, & toujours égal à l'angle de 90 degrés, dans le même tems que ce rayon varieroit, soit par accroissement, soit par décroissement, ce qui est impossible; il s'ensuit que quand même il seroit possible que le corps pût circuler dans une courbe telle que l'une des trois sections coniques, prises indifféremment, sa force centrale ne pourroit jamais être en raison inverse du quarré de la distance au centre des forces : ensorte que cette loi si célebre d'une force centrale, en raison inverse & doublée de la distance, dont les Newtoniens étourdissent le monde depuis si long-tems, qu'on ne *peut même revoquer en doute, sans se rendre coupable d'une honteuse précipitation, pour ne rien*

dire de plus, n'eſt, même conſidérée en ſoi, & en ſuppoſant poſſibles des mouvemens qui ſont impoſſibles, qu'une véritable abſurdité.

La méthode Newtonienne n'eſt pas plus exacte lorſqu'elle détermine les vîteſſes avec leſquelles le mobile décriroit la parabole, & l'hyperbole. Il s'agit ici d'aſſigner avec préciſion la hauteur dont le mobile devroit tomber, par le ſeul effet de ſa gravité, pour acquérir, à la fin de ſa chûte, une vîteſſe propre à lui faire décrire un cercle, une ellipſe, une parabole, une hyperbole. La vîteſſe acquiſe, à la fin de ſa chûte par la demi-diſtance, ou le demi-rayon, eſt celle avec laquelle le corps décriroit le cercle, ſuivant un théorême de M. Huighens, que nous avons démontré d'une maniere très-ſimple & très-élémentaire. Si la hauteur eſt moindre, ou plus grande que le demi-rayon, la vîteſſe acquiſe, à la fin de la chûte, ſera moindre, ou plus grande que celle avec laquelle le mobile décriroit le cercle, & dès-lors la courbe décrite, ſuivant M. Montucla lui-même (*a*), ſera une ellipſe, ce que nous lui accordons très-volontiers. Le foyer, centre des forces,

(*a*) Ibid. *pag.* 415 & 416.

ſera celui qui ſeroit plus éloigné du point du départ, dans le cas où la vîteſſe du corps ſeroit moindre que celle du cercle; & le plus voiſin, dans le cas où cette vîteſſe ſurpaſſeroit celle du cercle, ce que nous lui accordons encore. Mais, voici ce que nous n'accordons pas à M. Montucla; ſavoir, que dans le cas où la hauteur dont le corps tomberoit, ſeroit plus grande que le demi-rayon, cette hauteur dans le cas de l'ellipſe ne pourra toutefois s'étendre juſqu'à égaler le rayon entier, ni encore moins le ſurpaſſer. M. Montucla qui vouloit ménager le cas de la parabole, & de l'hyperbole, a reſtreint arbitrairement ceux de l'ellipſe à des chûtes moindres que de la hauteur du rayon; car, dit-il, *ſi l'on ſuppoſe la hauteur de la chûte, préciſément égale au rayon, le corps décrira une parabole*; & *une hyperbole, ſi cette hauteur étoit plus grande.*

Sur quoi nous obſervons d'abord qu'il réſulteroit de ce ſyſtême qu'un même corps pourroit décrire, autour d'un même centre, une infinité d'ellipſes différentes, en ſuppoſant différentes vîteſſes acquiſes à la fin des chûtes moindres que le rayon: une ſeule parabole, & une infinité d'hyperboles. Cette parabole unique placée en-

tre l'infinité d'ellipſes, & l'infinité d'hyperboles, eſt ſur-tout bien remarquable, & figure ici aſſez plaiſamment. Il ne falloit pas moins que les Téleſcopes Newtoniens, pour avoir ainſi diſtingué une ſeule courbe abîmée entre deux nombres infinis d'autres courbes. Il eſt encore remarquable que le paſſage d'une courbe à l'autre ſe fait ici très-bruſquement, & ſans gradation, c'eſt la plus légère différence dans la hauteur des chûtes qui va transformer l'ellipſe en parabole, & la parabole en hyperbole; car la hauteur de la chûte étant ſuppoſée moindre ſeulement de quelques toiſes, pieds ou pouces.... &c. que le rayon; la courbe ſera toujours rentrante, puiſque ce ſeroit toujours une ellipſe. En ajoutant ce peu d'eſpace à cette hauteur: voilà la courbe qui change bruſquement de nature, qui n'eſt plus rentrante, qui s'écarte tout d'un coup à l'infini de ſon axe, & dont le corps qui la parcourt remonte à l'infini au-deſſus de ſon centre de peſanteur. Il eſt évident que la meilleure réfutation que l'on puiſſe faire de ce ſyſtême, c'eſt ſa ſimple expoſition; car certainement c'eſt le réfuter que de l'expoſer tel qu'il eſt.

Mais Meſſieurs les Newtoniens ont-ils

donc oublié la Géometrie, lorſqu'ils ſe livrent à de pareilles idées? Ont-ils oublié, par exemple, que l'équation à l'ellipſe dont le paramètre ſeroit p, & l'axe principal $2a$, étant $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, pour la transformer en parabole, il falloit néceſſairement faire diſparoître de cette équation le ſecond terme $\frac{px^2}{2a}$, ce qui ne ſe pouvoit qu'autant que ce terme deviendroit nul à l'égard du premier terme px, & par conſéquent qu'autant que le centre ou foyer de tendance s'éloignant à l'infini, l'axe $2a$, deviendroit infini. Voilà comment le mouvement elliptique peut ſe transformer en mouvement parabolique, & non point en ajoutant quelques toiſes, pieds ou pouces à la hauteur dont on auroit ſuppoſé le corps tombé, ce qui ne ſeroit pas capable de changer la nature de la courbe décrite, ni de transformer aſſurément une courbe rentrante en elle-même, en une courbe non rentrante; c'eſt-à-dire, une courbe finie en une courbe infinie. Il eſt évident que le même raiſonnement s'applique au mouvement hyperbolique : quelques toiſes, pieds, ou pouces de plus, ou de moins, & même en général nul eſpace fini, plus grand, ou

plus petit, ajouté à la hauteur dont on ſuppoſeroit le corps tombé, ou retranché de cette même hauteur, ne pourroit jamais produire l'énorme différence qu'il y aura toujours entre une courbe rentrante qui n'éloigne jamais le corps circulant de ſon centre de mouvement que d'une quantité finie, & une courbe non rentrante, dont la nature ſeroit de le faire remonter à l'infini au-deſſus de ce même centre; ce qui ne pourroit s'exécuter que par l'effet d'une force de projection infinie, ainſi qu'il a été prouvé ſi ſouvent. Meſſieurs les Newtoniens n'ont donc pas bonne grace de crier à l'héréſie, lorſqu'on touche à leurs principes.

J'obſerverai néanmoins qu'il y a quelque choſe de vrai dans la propoſition de M. Montucla, & qui a pu cauſer ſa mépriſe; ſavoir, qu'en effet la vîteſſe avec laquelle un corps parcourroit la parabole, eſt toujours égale à celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit tombé de la hauteur du ſommet de la parabole au foyer; mais les tendances du corps ſont alors parallèles, (ce que M. Montucla auroit dû obſerver) & ne peuvent être ſuppoſées coïncider tout au plus que vers un centre ou foyer infiniment diſtant. Cette propoſition eſt

encore susceptible d'une démonstration rigoureuse.

Soit, en effet, la courbe *AONP*, (*Fig.* 31) supposée décrite par un corps, avec une vîtesse de projection *AS*, imprimée, égale à celle qu'il auroit acquise, s'il étoit tombé d'une hauteur, par exemple, *AF*: je dis que cette courbe sera une parabole, dont *F*, sera le foyer, dans le cas toutefois où les tendances du corps seroient parallèles, ou, ce qui revient au même, dans le cas où le centre de pesanteur seroit infiniment éloigné du corps *A*. Quelle que soit la vîtesse de projection imprimée au corps *A*, il est manifeste qu'il ne pourroit jamais décrire qu'une parabole; puisque, dans deux points quelconque de la courbe, l'on auroit toujours cette analogie : $t^2 : T^2 :: e : E$, c'est-à-dire, les quarrés des tems proportionnels aux espaces parcourus. Mais le corps, par l'hypothèse, étant mû avec la vîtesse acquise, à la fin de sa chûte, *AF*, parcourroit dans le même tems *T*, uniformément un espace $AM = FN$ double de *AF*; & dans un tems moindre, par exemple, *t*, un espace $AT = BO$: l'on auroit donc $T^2 : t^2 :: \overline{FN}^2 : \overline{BO}^2 :: E = AF$:

$\frac{AF \times \overline{BO}^2}{\overline{FN}^2} = AB$, c'eſt-à-dire, $\overline{FN}^2 : \overline{BO}^2 ::$ $AF : AB$, ce qui eſt préciſément l'analogie de la parabole.

Ainſi un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire une parabole, dans l'hypothèſe des tendances parallèles, ſera toujours mû avec une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit tombé de la hauteur *AF*, du ſommet de la parabole au foyer *F*; & il parcourroit avec cette vîteſſe uniformément un eſpace *AM*, double de *AF*; c'eſt-à-dire, un eſpace égal au demi-paramètre *P*, de cette courbe. Il eſt clair que quand la vîteſſe du corps ſeroit plus grande, le corps parcourroit un plus grand eſpace *AS*, dans le même tems, & alors le foyer tomberoit dans un point *Q*, plus éloigné du ſommet *A*, de l'origine, puiſque *AQ*, ſeroit moitié d'un plus grand eſpace, ou demi-paramètre *AS*. L'éloignement du foyer *F*, du point *A*, de l'origine, ſera donc proportionnel à la vîteſſe du mobile ; ſi donc l'on vouloit que le corps décrivît toujours une parabole, mais en tendant vers le foyer *Q*, qui eſt préciſément le cas ſuppoſé par M. Newton, & par lequel il a cru ajouter aux découvertes de Galilée, il eſt manifeſte que pour

conſerver la nature de la courbe, & par conſéquent, le parallélisme des tendances qui en eſt une ſuite néceſſaire, il faudroit éloigner le foyer *Q*, à l'infini, afin que les tendances puſſent toujours être conſidérées comme parallèles, relativement à ce foyer infiniment diſtant, & la courbe par conſéquent toujours parabolique: donc alors la vîteſſe imprimée au corps devroit être infinie, puiſque la diſtance du point *A*, de l'origine de la parabole à ſon foyer *F*, croît, comme il vient d'être prouvé, en proportion de la vîteſſe qui ſeroit imprimée au corps; & cette diſtance devenant infinie, il eſt clair que la vîteſſe de projection devroit être infinie, comme on l'a ſi ſouvent démontré.

Il eſt donc prouvé, de toutes les manieres poſſibles, que l'*immortel ouvrage des Principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle de M. Newton*, n'eſt d'un bout à l'autre qu'un vrai Roman, qui n'eſt pas encore le plus amuſant, ni le plus agréable à lire, en ce qui concerne la théorie des loix des forces centrales; & un tiſſu de paralogiſmes & de propoſitions fauſſes & abſurdes, à quoi ſe réduiront toujours ces découvertes, ſi ſublimes aux yeux de ſes adulateurs, dont ils penſent que cet homme,

homme, si justement célèbre à plusieurs autres égards, a enrichi la Méchanique & l'Astronomie physique, en laissant bien *loin derriere lui les Descartes, les Galilées, & les Huighens.*

Fin des Observations sur les Forces centrales.

REMARQUE.

Les Observations qui suivent sont purement Mathématiques, & n'ont aucun rapport à la matiere des Forces centrales qu'on vient de traiter; on les place ici, parce qu'elles n'ont pas paru d'une assez grande étendue pour devoir faire l'objet d'un Ouvrage particulier.



Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides

TOUTE grandeur, réſultante de la multiplication d'un nombre *N*, quelconque de quantités, ſera toujours d'autant moindre, qu'on ſuppoſeroit un plus grand nombre de variables décroiſſantes, finiſſant toutes par s'anéantir dans un même point, dans ce même nombre *N*, des quantités, par la multiplication deſquelles la grandeur ſeroit produite.

DÉMONSTRATION.

Que ces quantités ſoient *A*, *B*, *C*, *D*.... &c ; il eſt évident que, dans le cas où elles ſeroient ſuppoſées conſtantes, la grandeur, réſultante de leur multiplication, ſeroit *ABCD*.

Mais ſi l'on ſuppoſe que pluſieurs de ces mêmes quantités varient, & décroiſſent, par exemple, en allant de la baſe vers le ſommet de la grandeur, où elles finiroient par s'anéantir ; il eſt tout auſſi évident qu'alors la grandeur doit être moin-

dre qu'elle n'auroit été ſi toutes les quantités avoient été conſtantes, & n'avoient pas décrû ; & que ce décroiſſement de la grandeur ſeroit d'autant plus grand qu'il y auroit un plus grand nombre de variables décroiſſantes, dans le nombre N, des quantités, par la multiplication deſquelles la grandeur devroit être produite. Donc la grandeur décroîtra, en raiſon du nombre des variables décroiſſantes qui auroient concouru à la former.

Dans le cas d'une ſeule variable, la grandeur produite ſeroit $\frac{ABCD}{1}$. Dans le cas de deux variables la grandeur ſeroit $\frac{ABCD}{2}$. Dans le cas de trois, de quatre variables... &c. la grandeur ſeroit $\frac{ABCD}{3}$, $\frac{ABCD}{4}$... &c.

Nommant donc en général A, le produit d'un nombre M, quelconque de quantités, multipliées les unes par les autres ; N, le nombre de variables qui entreroient dans ce produit ; la grandeur ſera toujour : $\frac{A}{N}$. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Le théorême précédent eſt le terme où aboutiſſent les principes de l'Arithméti-

que de l'infini, & ceux du calcul intégral; car ayant l'élément x^n, d'une grandeur, ou $x^n dx$, les deux calculs ſe terminent à la règle d'accroître d'une unité l'expoſant de l'élément x^n, ou $x^n dx$; & de diviſer enſuite la quantité x^{n+1}, ou $x^{n+1} dx$; par cet expoſant, ainſi accrû d'une unité, c'eſt-à-dire, par $n+1$, ce qui donne pour grandeur produite $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, en retranchant la quantité infiniment petite dx de la grandeur.

Il eſt évident que ces deux calculs ne font que ſe conformer à l'eſprit du théorême précédent, auxquels ils n'arrivent encore qu'en parcourant une route plus longue, plus compliquée, & bien moins lumineuſe; car l'élément de la grandeur étant ſuppoſé x^n, l'expoſant n, exprimant tout ce que l'on voudra; un nombre entier, ou rompu, poſitif, ou négatif; & cet élément, exprimé en parties de la variable x, devant être multiplié par x, le produit des variables ſera: $x^n \times x^1 = x^{n+1}$, & leur nombre l'expoſant même $n+1$; puiſque cet expoſant n'exprime autre choſe que le nombre de fois que la variable x, aura été multipliée par elle-même.

Donc, par le théorême précédent, la

grandeur produite par l'élément x^n, multiplié par la variable x^1, sera $\frac{x^n \times x^1}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

L'élément étant x^n, s'il avoit fallu le multiplier par la variable x^m, la grandeur produite seroit toujours $\frac{x^{n+m}}{n+m}$, par le théorême précédent. D'où l'on voit que la règle qui prescrit d'augmenter d'une unité l'exposant de la variable, & de diviser la grandeur par cet exposant, ainsi augmenté d'une unité, n'est qu'un cas particulier de notre théorême; ce cas arrivant, lorsque la variable x, qui doit multiplier l'élément donné x^n, est élevée à un exposant égal à l'unité; alors $m = 1$, & la grandeur $\frac{x^{n+m}}{n+m} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

L'on a beaucoup écrit pour éclaircir les principes Métaphysiques des nouveaux calculs; mais il ne paroît pas que ce soit avec beaucoup de succès; ces calculs laissent toujours un louche qui ne peut être entiérement levé que par notre théorême.

S'il s'agit d'expliquer la règle qui prescrit d'accroître d'une unité l'exposant n, de la différentielle $x^n dx$, & de diviser par cet exposant $n+1$, ainsi accrû d'une unité, pour avoir la grandeur $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; le cal-

cul intégral renvoie au calcul différentiel ; & réciproquement le calcul différentiel renvoie au calcul intégral, quand il est question de rendre raison de la règle de la différentiation, ce qui fait un cercle vicieux ; car deux calculs relatifs pourroient être fondés sur des principes faux, & entiérement erronés, quoiqu'ils s'accordassent toujours entr'eux. Ainsi c'est n'avoir rien prouvé que de démontrer la justesse du calcul intégral par le calcul différentiel, & celle du calcul différentiel par le calcul intégral. L'autorité de ces calculs ne s'est même bien établie dans les Mathématiques, que parce qu'on n'a cessé de montrer qu'ils conduisoient à des résultats déja connus, & démontrés vrais, soit par la Géométrie, soit par d'autres méthodes aussi exactes.

La raison donc de la règle qui prescrit d'accroître d'une unité l'exposant n, de l'élément x^n, ou différentielle $x^n dx$; c'est parce que cet élément doit finir par être multiplié par la variable finie x, dont dx, est la différentielle ; ensorte que si l'élément x^n, avoit été constant, la grandeur produite seroit $x^n \times x^1 = x^{n+1}$; & ce qui fait qu'il faut diviser la grandeur x^{n+1}, par l'exposant $n+1$, c'est parce que cet

élément, n'eſt point conſtant, mais variable, & que l'expoſant $n+1$, exprimant le nombre des variables qui forment, par leur produit, la grandeur $x^n \times x^1 = x^{n+1}$, cette grandeur, par le théorême précédent, doit être diviſée par ce même nombre, ou expoſant $n+1$, en raiſon duquel la grandeur a néceſſairement dû décroître. Il paroît ſuivre delà que le calcul différentiel ne ſeroit pas d'une néceſſité abſolue, dans la meſure des ſurfaces & des ſolides; car dès que l'élément $x^n dx$, en produiſant la grandeur, doit finir par devenir $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, il eſt manifeſte qu'on n'a beſoin que de connoître l'élément x^n, exprimé en parties de la variable x, par lequel il devra être multiplié; car dès-lors l'on aura la grandeur x^{n+1}, & le nombre $n+1$, par lequel il faudra la diviſer.

Il eſt évident qu'en faiſant le contraire de cette opération, dont la juſteſſe eſt démontrée, par notre théorême fondamental, on trouvera toujours l'élément d'une grandeur donnée; car cette grandeur étant $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, la multipliant par ſon expoſant $n+1$, & la diviſant par la variable x, par lequel cet élément auroit été mul-

tiplié, l'on aura ſon élément x^n.

Si la grandeur donnée étoit $\frac{x^n \; m}{n+m}$, la multipliant par ſon expoſant $n+m$, & la diviſant par la variable x^m, par laquelle on ſuppoſeroit qu'elle auroit été multipliée, l'élément de la grandeur ſeroit alors x^n.

Application du Théorême précédent, à la meſure des Surfaces & des Solides.

Si une variable x, eſt multipliée par une conſtante a, la grandeur produite ſera, par le théorême fondamental, $\frac{a x^1}{1}$.

Donc la grandeur produite ſera un rectangle dont la baſe ſera la conſtante a, & x la hauteur.

Si deux variables x & y, ſe multiplient l'une l'autre; y étant la baſe, & x, la hauteur, la grandeur produite ſera $\frac{xy}{2}$, par le même théorême; c'eſt-à-dire, que cette grandeur ſera un triangle qui deviendra iſocelle en ſuppoſant $x = y$.

Si trois variables x, y, z, ſe multiplient, la grandeur produite ſera $\frac{xyz}{3}$, qui ſera une pyramide, ou un cône, tiers d'un

prisme, ou cylindre xyz, de même base & hauteur. Dans le cas où $x=y=z$; les trois dimensions étant égales, la grandeur $\frac{x^3}{3}$, seroit le tiers du cube x^3, puisqu'elle auroit décrû en raison de ces trois dimensions.

L'on voit qu'il en seroit toujours de même, quand on supposeroit un plus grand nombre de variables; divisant leur produit par leur nombre, l'on aura toujours la grandeur résultante de leur multiplication.

L'élément d'une parabole, dont le paramètre seroit, a, étant $y=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, multipliant cet élément par la hauteur, ou variable x, l'on aura $xy=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, qui seroit la valeur de la grandeur produite par l'élément $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=y$, supposé constant. Mais à cause du décroissement de la grandeur, en raison de l'exposant $\frac{3}{2}$, de la variable x, je divise le produit par cet exposant, ce qui donnera $\frac{2}{3}xy=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ pour quadrature indéfinie de cette parabole.

L'élément de la premiere parabole cubique étant, $y=a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, je le multiplie par la hauteur x, ce qui donneroit pour gran-

deur produite, dans le cas où l'élément seroit constant; $xy = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$; mais à cause du décroissement, en raison de l'exposant $\frac{4}{3}$, de la variable, je divise le produit par $\frac{4}{3}$, ce qui donnera: $\frac{3}{4} xy = \frac{3}{4} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$, pour valeur de la quadrature de cette courbe.

L'élément de la seconde parabole cubique étant: $y = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$, je le multiplie par la hauteur x, ce qui donneroit, pour grandeur produite, par cet élément, supposé constant: $xy = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}}$; mais à cause du décroissement de la grandeur produite, en raison de l'exposant $\frac{5}{3}$, de la variable, la quadrature de cette courbe sera: $\frac{3}{5} xy = \frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}}$.

L'équation à toutes les paraboles étant: $y^m = a^{m-n} x^n$, l'élément sera: $y = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}}$; le multipliant par la hauteur x, la grandeur produite par cet élément supposé constant seroit: $xy = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n+m}{m}}$; mais à cause du décroissement de la grandeur produite, en raison de l'exposant, $\frac{n+m}{m}$ de la variable, cette grandeur, ou qua-

drature de toutes les paraboles ſera : $\frac{m}{n+m} xy = \frac{m}{n+m} a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n+m}{m}}$.

L'équation à toutes les hyperboles, rapportées à leur aſymptote étant, $y^m = a^{m+n} x^{-n}$, l'élément ſera : $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}}$; le multipliant par la hauteur x, la grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant ſeroit : $xy = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}$: mais attendu le décroiſſement de la grandeur en raiſon de l'expoſant $\frac{m-n}{m}$, de la variable, la grandeur produite, ou la quadrature de toutes les hyperboles ſera : $\frac{m}{m-n} xy = \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}$.

Dans l'hyperbole ordinaire, rapportée à ſes aſymptotes, l'on a : $m = n = 1$. Donc la quadrature de cette courbe ſera : $\frac{1}{1-1} xy = \frac{1}{1-1} a^{\frac{1+1}{1}} x^{\frac{1-1}{1}} = \frac{1}{0} xy = \frac{1}{0} a^2 x^{\frac{0}{1}}$.

On remarquera la ſingularité de l'expreſſion de cette quadrature : $\frac{1}{0} a^2 x^{\frac{0}{1}}$, la grandeur a^2, ſe trouve entre deux infinis qui la multiplient ; car $\frac{1}{0} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty$, & $\frac{0}{1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1}{\infty}$; ainſi cette expreſſion peut

ſe réduire à celle-ci : $\infty a^2 x^{\frac{1}{\infty}}$: par le premier infini, la grandeur a^2, croiſſant à l'infini, changeroit d'ordre, & deviendroit d'un ordre plus élevé que a^2, mais elle décroît en même tems à l'infini par le ſecond infini $x^{\frac{1}{\infty}}$; & par-là cette grandeur demeure dans ſon ordre, croiſſant, & décroiſſant en meme tems à l'infini.

Faiſant $a = 1$, l'expreſſion $\infty a^2 x^{\frac{1}{\infty}}$, ſe réduira à : $\infty x^{\frac{1}{\infty}}$, qui nous montre que la quadrature de cette courbe ne peut être déterminée en termes finis, puiſqu'elle ſe trouve entre un coëfficient infini, & dès-là indéterminé, & un expoſant infiniment petit, qui par conſéquent eſt encore indéterminé.

La raiſon principale qui fait que cette courbe ne peut être quarrée, c'eſt que le point de ſa quadrature concourt avec celui où la variable x, devient conſtante. En effet, l'équation à cette courbe eſt : $xy = a^2$; ſon élément ſera donc : $y = a^2 x^{-1}$: multipliant par la hauteur x, l'on aura : $xy = a^2 x^0$. Voilà l'inſtant de la quadrature, il ne s'agit plus que de ſavoir l'état du décroiſſement de la grandeur, exprimé par l'expoſant de la variable :

Mais la variable eſt ici $x^0 = 1$, qui eſt une conſtante, & non une variable ; donc l'expoſant de cette conſtante ne peut pas ſervir à déterminer une grandeur qu'on ſuppoſe produite par une quantité variable.

L'élément de toutes les paraboles étant : $y = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}}$, ſon quarré ſera : $y^2 = a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$; le multipliant par la variable ou hauteur x, l'on aura $xy^2 = a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n+m}{m}}$, pour valeur du ſolide produit par l'élément, $y^2 = a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$ ſuppoſé conſtant : mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur, en raiſon de l'expoſant $\frac{2n+m}{m}$, de la variable, la ſomme infinie de tous les quarrés des ordonnées de toutes les paraboles ſera : $\frac{m}{2n+m} xy^2 = \frac{m}{2n+m} a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n+m}{m}}$.

Si l'on ſuppoſe que y^2, repréſente un cercle dont le rayon ſeroit y, le ſolide ſera transformé en paraboloïde, & alors xy^2, ſeroit un cylindre.

Dans la parabole quarrée, $m = 2$, $n = 1$. Donc le paraboloïde $\frac{m}{2n+m} xy^2$, eſt $\frac{1}{2} xy^2$.

Ainſi ce paraboloïde eſt la moitié du cylindre xy^2, de même baſe & hauteur.

On peut remarquer que le cône n'eſt que le tiers d'un cylindre de même baſe & hauteur, tandis que le paraboloïde en eſt la moitié; ce qui provient de ce que les cercles, élémens du cône, ſont entr'eux en raiſon de x^2, tandis que les cercles, élémens du paraboloïde, ſont en raiſon de $ax = y^2$. Ainſi la variable x, étant plus élevée dans ſon expoſant, dans les élémens du cône que dans ceux du paraboloïde, le cône doit être une moindre partie du cylindre que le paraboloïde.

L'équation au cercle, dont les abſciſſes commencent au centre, étant $y^2 = a^2 - x^2$; ſi l'on multiplie cet élément du ſolide formé du quarré de toutes les ordonnées du quart de cercle, par la hauteur x, l'on aura, pour grandeur produite, par cet élément ſuppoſé conſtant, $xy^2 = a^2x - x^3$. Mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur, en raiſon de l'expoſant 1, & 3, de la variable complexe, la grandeur produite par cet élément ſera : $S.\,xy^2 = \frac{a^2x}{1} - \frac{x^3}{3}$: faiſant $x = a$, ce ſolide ſera : $\frac{a^3}{1} - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$; c'eſt-à-dire, que la ſomme in-

finie des quarrés des élémens du quart de cercle, eſt égale au $\frac{2}{3}$ du cube du rayon.

Si l'on ſubſtitue la ſuite infinie des cercles décrits avec tous ces rayons à la place de leur quarré, le ſolide xy^2, ſera transformé en cylindre, & le ſolide $\frac{a^2x}{1} - \frac{x^3}{3}$ en demi-ſphère. Donc la demi-ſphère ſera les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même baſe & hauteur.

REMARQUE.

De ce que la ſomme infinie du quarré des élémens du quart de cercle eſt égale au $\frac{2}{3}$ du cube du rayon, c'eſt-à-dire, à $\frac{2}{3}a^3$, il s'enſuit que le quart de cercle, qui eſt égal à la ſomme infinie des ſimples élémens, ſera plus grand que les $\frac{2}{3}$ du quarré du rayon; c'eſt-à-dire, que $\frac{2}{3}a^2$, à cauſe que les élémens du quart de cercle ſont moins élevés dans leur expoſant que leur quarré, & que par conſéquent la grandeur produite par une variable moins élevée dans ſon expoſant, diminue moins que celle engendrée par un élément plus élevé dans le ſien.

L'équation d'une courbe étant : $ay = ax - x^2$; ſon élément ſera $y = \frac{ax - x^2}{a}$: multipliant par la hauteur x, l'on aura

$xy = \frac{ax^2 - x^3}{a} = x^2 - \frac{x^3}{a}$, pour valeur de la grandeur produite par l'élément $y = \frac{ax - xx}{a}$, ſuppoſé conſtant : mais attendu le décroiſſement de la grandeur en raiſon de l'expoſant 2, 3, de la variable complexe, la grandeur produite, ou la quadrature de cette courbe, ſera : $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}$.

De l'équation ci-deſſus : $ay = ax - x^2$, qui eſt à la parabole, l'on tire cette analogie : $a : a - x :: x : y$, qui enſeigne que cette analogie ſe trouve dans la parabole, lorſqu'on prend les abſciſſes x, ſur la double ordonnée, menée par le foyer de la courbe ; cette double ordonnée étant égale au paramètre a, l'analogie relative au ſegment de la parabole, dont la corde eſt égale au paramètre a, eſt : $a : a - x :: x : y$: car au foyer de la courbe, l'abſciſſe $DF = x$ (*fig.* 32), devient égale à $\frac{a}{2}$, & l'ordonnée $AF = y$, égale alors $\frac{a}{4}$. Donc l'équation $ay = ax - x^2$, eſt alors : $\frac{a}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, qui eſt une égalité vraie. Mais l'équation ordinaire à la parabole $y^2 = ax$, donne la même égalité quand l'ordonnée tombe au foyer, puiſqu'alors $y^2 = \frac{a^2}{4}$, & que

$ax = \frac{a^2}{4}$. De plus prenant les x, à l'ordinaire sur l'axe AM, de la parabole, & faisant $CN = z$, l'on aura : $AF - EF = AE = \frac{1}{4} a - z = x$. Donc, par la propriété de la parabole : $\frac{1}{4}a^2 - az = ax = y^2 = \overline{EC}^2$; or BD, étant a, & $FD = \frac{1}{2}a$, $nD = \frac{1}{2}a - y$, & $BN = a - \frac{1}{2}a + y = \frac{1}{2}a + y$. Mais, par l'hypothèse : $a : \frac{1}{2}a + y :: \frac{1}{2}a - y : z$; d'où résulte l'égalité $az = \frac{1}{4}a^2 - y^2$, ou $y^2 = \frac{1}{4} a^2 - az$, comme ci-dessus.

Ainsi l'équation $ay = ax - x^2$, n'est que l'équation à une parabole renversée, dont les abscisses DN (*Fig.* 32), sont prises sur une ligne BD, perpendiculaire à l'axe, & les ordonnées CN parallèles au même axe.

L'on ne s'est un peu étendu ici que pour faire remarquer cette propriété élémentaire de la parabole ; savoir, qu'en menant par son foyer F, la double ordonnée BD qui est toujours égale au paramètre, a, de la courbe, prenant les abscisses sur cette droite BD, sur laquelle on élevera les perpendiculaires ou ordonnées NC, l'on a toujours : $a : a - x :: x : y$, comme on l'a déja observé.

On peut rendre cette analogie générale, en supposant l'abscisse x, multipliée par

un nombre n, quelconque, ce qui donneroit $a : a - x :: nx : y$. La quadrature de la parabole feroit alors : $\frac{nx^2}{2} - \frac{nx^3}{3a}$, qui n'eft qu'un multiple de la parabole $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}$, terminée par la double ordonnée qui pafferoit par le foyer ; & dans le cas où $n = \frac{33}{14}$, la parabole $\frac{nx^2}{2} - \frac{nx^3}{3a}$, feroit à peu près égale au demi-cercle, dont le diamètre feroit la bafe a, de la parabole, comme il eft facile de s'en affurer.

Delà il fuit qu'on pourra former l'équation à la parabole en deux manieres ; la premiere, en prenant les coupées fur l'axe; & la feconde, en les prenant fur une corde quelconque a, perpendiculaire à l'axe. Dans le premier cas, l'équation à cette courbe fera $y^2 = px$, & dans le fecond $ay = nax - nx^2$. On voit, qu'en faifant $n = 1$, l'équation fe réduit à : $ay = ax - x^2$, qui eft le cas où la corde $a = p$, & paffe par le foyer de la courbe.

L'élément d'une courbe étant en général : $y = x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} \ldots$ &c. L'on voit, par tout ce qui vient d'être dit, qu'il fera toujours très-facile d'en avoir la quadrature.

Si l'élément étoit : $2x\sqrt{x^2} = 2x \, . \, \overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $2x^2 \, . \, \overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$, pour valeur de la grandeur produite par l'élément $2x \, . \, \overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$ supposé constant. Mais à cause du décroissement de la grandeur produite, à raison de l'exposant 2, de la variable considérée sous le signe, & de l'exposant $\frac{3}{2}$ auquel elle est élevée, puisque $x^2 \times \overline{x^2}^{\frac{1}{2}} = \overline{x^2}^{\frac{3}{2}}$, le décroissement sera en raison du produit des deux exposans 2 & $\frac{3}{2}$, auquel la variable est élevée, c'est-à-dire, en raison de $2 \times \frac{3}{2} = 3$, la grandeur produite sera donc : $\frac{2x^2 \, . \, \overline{x^2}^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{2}{3} x x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^3$. Et en effet, $2x \, . \, \overline{x^2}^{\frac{1}{2}} = 2x^2$; multipliant cet élément par la hauteur x, & divisant le produit par l'exposant 3, de la grandeur produite, l'on aura : $\frac{2}{3} x^3$.

L'on voit par-là que quand la variable qui multiplie hors du signe, est l'élément de la variable qui est sous le signe, comme

en cet exemple, $2x . \overline{x^2}^{-\frac{1}{2}}$, il suffit d'ajouter une unité à l'exposant du signe, & diviser ensuite la grandeur par cet exposant accru d'une unité. C'est-là la règle que prescrit le calcul intégral.

Si l'élément donné est, $nx^{n-1} . \overline{x^n}^{-\frac{1}{2}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on aura : $nx^n . \overline{x^n}^{-\frac{1}{2}} = n . \overline{x^n}^{-\frac{3}{2}}$, pour grandeur produite par l'élément $nx^{n-1} . \overline{x^n}^{-\frac{1}{2}}$, supposé constant. Mais à cause du décroissement de la grandeur, $n . \overline{x^n}^{-\frac{3}{2}}$, à raison des deux exposans n, $\frac{3}{2}$, auxquels la variable est élevée, le décroissement sera en raison de $\frac{3n}{2}$, produit des deux exposans; la grandeur produite sera donc : $\frac{n . \overline{x^n}^{-\frac{3}{2}}}{\frac{3n}{2}} = \frac{2}{3} n \overline{x^n}^{-\frac{3}{2}}$.

Si l'élément donné est en général, $m . ax^{n-1} . \overline{ax^n}^{-p}$, le multipliant par la hauteur x, l'on aura : $m . ax^n . \overline{ax^n}^{-p} = m . \overline{ax^n}^{-p+1}$, pour grandeur produite par cet élément

ſuppoſé conſtant. Mais attendu le décroiſſement, en raiſon du produit : $n \times \overline{p+1} = np+n$, des expoſans auxquels la variable eſt élevée, la grandeur produite par cet élément ſera : $\frac{m . \overline{ax^{n}}^{\,p+1}}{np+n}$.

D'où il ſuit que toutes les fois que l'on aura hors du ſigne, une grandeur ax^{n-1}, & ſous le ſigne la même grandeur ax^{n}, avec un expoſant plus grand d'une unité que l'expoſant de celle qui eſt hors du ſigne, il ſera toujours facile d'avoir la grandeur produite par un tel élément.

Si l'élément donné étoit : $\overline{a+bx}^{\,p}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $x . \overline{a+bx}^{\,p}$, pour valeur de la grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant. Mais la variable x, qui eſt ſous le ſigne étant déja élevée à l'expoſant p, en la multipliant encore par x, elle ſera élevée à l'expoſant $p+1$: ſi donc on élevoit tout le terme : $a+bx$, à l'expoſant $p+1$, la grandeur produite par l'élément $\overline{a+bx}^{\,p}$, ſeroit alors $\frac{\overline{a+bx}^{\,p+1}}{p+1}$. Or cette quantité doit, 1°, être diviſée par la conſ-

tante b, qui multiplie la variable ſous le ſigne, & qui ne la multiplie point hors du ſigne. La grandeur ſera donc : $\frac{\overline{a+bx}^{p+1}}{\overline{p+1}\times b}$; 2°, en élevant tout le terme $\overline{a+bx}^{p}$, à l'expoſant 1, on y a compris la conſtante a, qui auroit dû en être retranchée, préciſément comme il ſeroit arrivé ſi au lieu d'avoir pour élément $\overline{a+bx}^{p}$, on avoit eu ſimplement $\overline{bx}^{p}$. Il faudra donc retrancher de la grandeur cette conſtante élevée à l'expoſant $p+1$, & diviſée par $\overline{p+1}\times b$. Donc la grandeur produite par l'élément, $\overline{a+bx}^{p}$, ſera : $\frac{\overline{a+bx}^{p+1}}{\overline{p+1}\times b} - \frac{a^{p+1}}{\overline{p+1}\times b}$.

Si la conſtante avoit eu le ſigne moins; il eſt évident qu'il auroit fallu l'ajouter à la grandeur, vu que cette conſtante, poſitive, ou négative ſe trouve toujours de trop dans la grandeur.

On peut ſuivre ici la règle que preſcrit le calcul intégral qui eſt de ſuppoſer la variable égale à zéro; ſi tous les termes

de la grandeur ſe détruiſent, la grandeur eſt alors complette, s'il y a quelques termes qui ſubſiſtent, il faudra les retrancher, ou les ajouter à la grandeur, ſuivant que ces termes ſeroient poſitifs ou négatifs, à cauſe que la grandeur eſt toujours trop grande, ou trop petite des quantités qu'elle contient que la variable ne multiplie point.

Si l'élément donné étoit : $2x \,.\, \overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$; le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $2x^2 \,.\, \overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$, pour grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant; mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur en raiſon du produit des deux expoſans 2, $\frac{3}{2}$ auxquels la variable eſt élevée, la grandeur ſera : $\frac{2}{3} \,.\, \overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$.

On ne parlera plus des conſtantes qu'il faudroit ajouter ou retrancher à la grandeur, attendu ce qu'on en a dit.

Si l'élément étoit : $x \,.\, \overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$, la grandeur produite ſeroit, ſuivant ce qui vient d'être dit : $\frac{1}{3} \,.\, \overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$, moitié par conſéquent de la grandeur ci-deſſus : $\frac{2}{3} \,.\, \overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$.

Si l'élément étoit plus généralement : $\overline{a \pm x}^{\frac{n}{m}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $x \,.\, \overline{a \pm x}^{\frac{n}{m}}$, pour grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant. Mais attendu le décroiſſement de la grandeur, en raiſon du produit des deux expoſans, 1, & $\frac{n+m}{m}$, auxquels la variable eſt élevée, la grandeur produite ſera : $\frac{m}{n+m} \,.\, \overline{a \pm x}^{\frac{n+m}{m}}$.

Si enfin l'élément donné étoit en général : $B \,.\, x^{m-1} \overline{x^m \pm r a^q}^{p}$, la grandeur produite ſeroit toujours : $\frac{B \,.\, \overline{x^m \pm r a^q}^{p+1}}{\overline{p+1} \,.\, m \,.\, r}$.

Si l'élément étoit : $\frac{1}{2} \overline{a^2 + bx} \,.\, \overline{a^2 x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $\frac{1}{2} \overline{a^2 x + b x^2} \,.\, \overline{a^2 x + bx^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \overline{ax + bx^2}^{\frac{3}{2}}$, pour grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant. Mais le décroiſſement de la grandeur n'étant ici qu'en raiſon de l'expoſant $\frac{3}{2}$, auquel les deux termes qui compoſent la grandeur ſont égale-

ment élevés, la grandeur produite sera :
$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} . \overline{ax + bx^2}^{\frac{1}{2}}$: tous les termes de cette grandeur renfermant la variable, cette grandeur sera complette, & il n'y aura rien à y ajouter, ni à en retrancher.

On voit à présent d'une maniere plus sensible ce qui fait qu'une grandeur est complette, ou incomplette. Quand après avoir multiplié l'élément donné par la hauteur x, la partie de la grandeur résultante de ce produit qui multiplie hors du signe, est ou l'égale, ou le multiple quelconque de celle qui est sous le signe, comme dans ce dernier exemple ; alors la grandeur est égale à la partie qui est sous le signe, élevée seulement à un exposant plus grand d'une unité que celui que cette même partie de la grandeur a sous le signe ; multipliée, la dite partie de grandeur, par le nombre, ou la constante quelconque qui la multiplie hors du signe.

Ainsi : $\frac{1}{2} \overline{a^2x + bx^2} . \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} . \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$. Cette grandeur étant évidemment complette, il n'y aura donc rien à y ajouter, ni à en retrancher, & il suffira de la diviser par l'exposant $\frac{3}{2}$, auquel

elle eſt élevée, attendu que le décroiſſement de la grandeur eſt toujours en raiſon de l'expoſant auquel la grandeur eſt élevée.

Nous avons vu ci-devant qu'ayant un élément x^2, multiplié par une hauteur x, la grandeur produite étoit, $\frac{x^3}{3}$, résultat qu'on obtenoit également en mettant la variable ſous cette forme : $x \times x . \overline{x^2}^{\frac{1}{2}} = x^2 . \overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$, & la faiſant varier à raiſon du produit des deux expoſans 2, & $\frac{3}{2}$, auxquels elle étoit élevée.

Dans l'exemple ci-deſſus, $a^2x + bx^2$, qui multiplie hors du ſigne repréſente la variable x^2, & $\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, racine de la premiere, repréſente x, racine de x^2. Or comme la grandeur produite x^3, eſt diviſée par ſon expoſant 3, ſomme des expoſans 1, & 2, de la variable x, & x^2; de même la grandeur $\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$, doit être diviſée par la ſomme $1 + \frac{1}{2}$, des expoſans des quantités, $\overline{a^2x + bx^2}^{1} . \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ qui la forment par leur multiplication. Ainſi quand un quarré compoſé de quan-

tités variables eſt multiplié par ſa racine, la grandeur produite par l'élément doit toujours être diviſée par la ſomme des expoſans des deux quantités qui en ſe multipliant forment la grandeur.

Mais quand la quantité qui multiplie hors du ſigne n'eſt ni l'égale, ni le multiple de celle qui eſt ſous le ſigne, comme en cet exemple, $2 . x^2 . \overline{x^2 + a^2}^{\frac{1}{2}}$, il eſt manifeſte qu'en formant la grandeur : $2 . \overline{x^2 + a^2}^{\frac{3}{2}}$, cette grandeur ſera plus que complette, attendu que dans les deux quantités qui ſe multiplient, l'une n'eſt pas le quarré de l'autre, comme dans l'exemple précédent, il y a ſous le ſigne la conſtante a^2, qui ne ſe trouve point dans la quantité qui multiplie hors du ſigne, & cette quantité ſe trouvera de trop dans la grandeur, à cauſe qu'elle eſt poſitive, comme elle y ſeroit de moins ſi elle étoit négative. Donc il faudra la retrancher dans le premier, & l'ajouter dans le ſecond.

L'on ne s'étendra pas davantage ſur cette méthode de trouver les grandeurs réſultantes du produit d'un élément variable par une hauteur auſſi variable, quoi-

qu'il fût poſſible d'embraſſer un beaucoup plus grand nombre de cas, même très-compliqués, attendu que l'on ne s'eſt propoſé d'autre objet ici que de montrer que la règle qui preſcrit de diviſer la grandeur produite par un élément variable, par l'expoſant auquel la variable eſt élevée, eſt vraie en ſoi indépendamment des principes du calcul différentiel d'où on la déduit ordinairement, & de l'Arithmétique de l'infini; c'eſt-à-dire, qu'en faiſant même abſtraction de ces deux calculs, & les conſidérant comme non connus, il n'en eſt pas moins vrai que toute grandeur produite par un élément variable, décroît, par delà de ce qu'elle feroit ſi ſon élément étoit conſtant, en raiſon de l'expoſant auquel la variable qui entre dans cette grandeur eſt élevé. Et ce principe ainſi détaché du calcul différentiel, & de l'arithmétique de l'infini, peut avoir ſon utilité, ſur-tout dans les Livres élémentaires de Géométrie, où l'on peut l'employer, pour démontrer d'une maniere fort ſimple tout ce qui a rapport à la meſure des ſurfaces & des ſolides, & à trouver même la quadrature approchée du cercle, de l'ellipſe, de l'hyperbole.... &c; car l'équation, par exemple, au cer-

cle étant : $y^2 = ax - x^2$, l'élément sera : $y = \sqrt{ax - x^2}$, multipliant par la hauteur x, l'on aura : $xy = x . \sqrt{ax - x^2}$, réduisant le radical en suite infinie, multipliant chaque terme par la variable x, qui multiplie hors du signe, & divisant chaque terme par l'exposant auquel la variable x, s'y trouvera élevée, il est clair que l'on auroit la quadrature approchée du cercle, & par le même principe, la quadrature approchée de l'ellipse, de l'hyperbole, & des autres courbes non quarrables.

On voit aussi que le principe métaphysique de l'intégration, & de la différentiation est totalement éclairci par notre théorême, puisque les différentielles dx, dy, dz... &c, c'est-à-dire, les quantités infiniment petites ne sont nullement nécessaires pour déterminer les grandeurs par leurs élémens, ou les élémens par les grandeurs données. La grandeur donnée étant x^n, son élément sera nx^{n-1}, ou $nx^{n-1}dx$, en supposant l'élément nx^{n-1}, multiplié par $dx = \frac{x}{\infty}$. Dans le calcul différentiel l'élément nx^{n-1}, est multiplié par une partie infiniment petite de la variable ou hauteur x; ensorte que quand l'élé-

ment $n x^{n-1}$, représente, par exemple, une ligne, le produit $n x^{n-1} d x$, est un rectangle infiniment petit, dont la hauteur est $d x = \frac{x}{\infty}$. Or intégrer la différentielle $n x^{n-1} d x$, c'est prendre la somme de tous les rectangles infiniment petits $n x^{n-1} d x$, ou, ce qui revient au même, c'est substituer une hauteur finie x, à la hauteur infiniment petite $d x$, & diviser la grandeur produite par cette substitution, par l'exposant n, auquel la variable se trouve alors élevée, puisque, par notre théorême fondamental, la grandeur décroît alors en raison de l'exposant auquel elle s'éleve.

La plupart des Auteurs obscurcissent ce principe si simple, par la maniere dont ils exposent la règle de l'intégration. *Ajoutez*, disent-ils, *une unité à l'exposant de la variable*, $n x^{n-1} d x$, *divisez ensuite par cet exposant, ainsi accru d'une unité, multiplié par la différentielle* $d x$, & vous aurez l'intégrale $\frac{n x^{n-1+1} d x}{n d x} = x^n$.

D'autres énoncent la règle d'une autre maniere, après avoir dit qu'il faut augmenter l'exposant de la variable élémentaire d'une unité, & diviser par ce même exposant ainsi augmenté, ce qui réduit

la grandeur ſous cette forme $\frac{nx^{n-1+1}}{n}$ $dx = x^n dx$, ajoutent, & *effacez la différentielle dx.* Ce qui donne lieu à une foule d'objections, & à quantité de raiſonnemens métaphyſiques, pour & contre le principe des infiniment petits, qui ſeroient prévenus, ſi la règle de l'intégration, & de la différentiation étoit énoncée comme il convient.

Voici comment il me paroît que cette règle doit être énoncée. La différentielle étant $nx^{n-1}dx$. Il faut dire, *ſubſtituez l'intégrale* x, *à ſa différentielle* dx, *ce qui accroîtra d'une unité l'expoſant* n—1, *de la variable, & diviſez la grandeur* $nx^{n-1+1} = nx^n$, *par l'expoſant de la grandeur* nx^n, *ou par cet expoſant* $n-1+1$, *ainſi augmenté d'une unité.*

Il eſt évident que l'opération de l'intégration ne préſente plus de difficulté à éclaircir, dès que la règle eſt énoncée de la ſorte; on voit comment, & pourquoi la quantité infiniment petite *dx*, diſparoît, ſans que la grandeur en puiſſe être altérée, parce que la règle ne dit pas d'effacer cette quantité de la grandeur produite $x^n dx$; mais de lui ſubſtituer ſon intégrale *x*, dans l'expreſſion $nx^{n-1}dx$,

ce qui réduit cette expreſſion à $n x^n$. Et comme, dans ce cas, la variable s'eſt élevée à l'expoſant n, & que, par le théorême précédent, la grandeur doit décroître en raiſon de ce même expoſant; il eſt clair que la grandeur produite, ou l'intégrale de $n x^{n-1} d x$, ſera $\frac{n x^{n-1} \times x}{n-1+1} = x^n$.

Par la même raiſon les obſcurités qu'on rencontre dans la différentiation, diſparoîtroient ſi la règle générale étoit établie comme il ſuit.

Une puiſſance quelconque x^n, étant donnée, en trouver la différentielle. La règle ſe réduit, 1°, à retrancher une unité à l'expoſant n, de la grandeur; 2°, à multiplier par l'expoſant n, & par la différentielle $d x$, ce qui fait trouver la différentielle $n x^{n-1} d x$. On pourroit énoncer la règle de cette ſorte : *ſubſtituez la différentielle* dx, *à ſon intégrale* x, *ce qui diminuera d'une unité l'expoſant de la variable* x^n, *& multipliez par l'expoſant* n, *de la grandeur donnée, & vous aurez la différentielle* $n x^{n-1} d x$, *demandée*. Il eſt évident que la différentiation eſt l'inverſe de l'intégration. Si la grandeur donnée étoit un produit de pluſieurs variables, par exemple, xy, ſubſtituant la différentielle

$d x$

dx à ſon intégrale. L'on auroit d'abord ydx, & ſubſtituant enſuite à l'intégrale y, ſa différentielle dy, l'on auroit encore xdy. Donc la différentielle de xy ſeroit $ydx + xdy$.

Si le produit des variables étoit en général $x^n y^m$, la différentielle ſeroit, par la même règle : $ny^m x^{n-1} dx + mx\, ny^{m-1} dy$.

Si la grandeur donnée étoit : $\frac{x^n}{y^m} = x^n y^{-m}$, la même règle feroit trouver pour différentielle de cette grandeur : $ny^{-m} x^{n-1} dx - m x^n y^{-m-1} dy = \frac{n x^{n-1} dx}{y^m} - \frac{m x^n dy}{y^{m+1}} = \frac{n y x^{n-1} dx - m x^n dy}{y^{m+1}}$.... &c. en préſentant les règles des nouveaux calculs de cette ſorte, les principes en ſont rigoureux, & leur métaphyſique fort claire, ce qui peut encore ſervir à juſtifier ces procédés des analyſtes de réduire à zéro toute quantité infiniment petite à l'égard d'une autre quantité, à laquelle elle devroit ſe réunir, ſoit par addition, ſoit par ſouſtraction; puiſque, dans les deux cas, les réſultats ſeroient les mêmes.

La plus grande utilité que les Mathématiques aient retirée des nouveaux calculs conſiſte principalement dans ce point; ſavoir, qu'étant donnée une équation

quelconque, renfermant un nombre quelconque de variables, l'on peut toujours transformer cette équation en une nouvelle équation. L'équation donnée étant, par exemple, $y^m = a x^n$, l'on peut toujours, en la différenciant, en tirer la nouvelle équation $my^{m-1} dy = nax^{n-1} dx$, qui ſuppoſe cette proportion : $m y^{m-1}$: $n a x^{n-1}$: : dx : dy ; c'eſt-à-dire, que les élémens, ou différentielles dx, dy des variables x & y, ſont toujours entr'eux comme les élémens my^{m-1}, $n a x^{m-1}$, des grandeurs égales y^m, $a x^n$, ou, ſi l'on veut, que les élémens des grandeurs égales, y^m, $a x^n$, ſont entr'eux en raiſon réciproque des élémens ou différentielles dy, dx.

Cette analogie eſt fondée ſur le principe de l'égalité des accroiſſemens, ou des décroiſſemens des variables qui forment l'équation donnée. Si l'équation donnée eſt, par exemple, $y^2 = x z$, il eſt manifeſte que cette égalité devant toujours avoir lieu, ſi y^2, croît ou décroît d'une quantité quelconque N, $x z$, doit croître ou décroître préciſément d'une quantité $M = N$; enſorte que l'on aura, après l'accroiſſement, ou le décroiſſement, $y^2 \pm N = x z \pm N$; d'où on tirera $N = M$. Ainſi, dans l'exemple préſent, l'on aura : $2ydy =$

$z\,dx + x\,dz$ qui ſont les accroiſſemens, ou les décroiſſemens des grandeurs égales y^2, & xz. Si l'équation donnée étoit $y^2 = ax$, l'on en tireroit $2y\,dy = a\,dx$ qui eſt l'égalité des accroiſſemens des variables y^2, ax; car quant x, devient $x + dx$, y, devient $y + dy$. Donc : $\overline{x+dx} \times a = \overline{y+dy}^2$, ce qui donne : $ax + a\,dx = y^2 + 2y\,dy + dy\,dy$. Or, par l'équation donnée, $y^2 = ax$. Donc : $a\,dx = 2y\,dy + dy\,dy$; retranchant le dernier terme qui eſt infiniment petit à l'égard du premier l'égalité ſe réduira à $a\,dx = 2y\,dy$. D'où ſuit l'analogie : $a : 2y :: dy : dx$.

L'équation donnée étant en général : $y^m = ax^n$, l'on en tirera, en differenciant $my^{m-1}dy = nax^{n-1}dx$, qui eſt l'égalité des accroiſſemens des grandeurs variables y^m, ax^n; puiſqu'en effet quand x, devient $x + dx$, l'ordonnée y, devient $y + dy$. Donc $\overline{y+dy}^m = a \times \overline{x+dx}^n$, ce qui ſe réduira à $y^m + my^{m-1}dy = ax^n + nax^{n-1}dx$, à cauſe des termes où ſe trouveroient $dydy$, $dydydy$. . . ., & $dxdx$, $dxdxdx$. . . . &c. qui ſont nuls relativement à ceux qui les précéderoient; & comme, par l'équation donnée $y^m = ax^n$, il s'enſuit que l'on aura : $my^{m-1}dy = nx^{n-1}dx$.

Ainsi une équation quelconque $y^m = ax^n$, étant donnée, on pourra toujours, en la différenciant, en tirer la nouvelle équation : $my^{m-1}dy = n x^{n-1}dx$, & les rapports égaux $\frac{my^{m-1}}{nax^{n-1}} = \frac{dx}{dy}$, ou $\frac{nax^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{dy}{dx}$, ce qui fournit un moyen des plus simples pour résoudre une foule de questions.

Par exemple, si on multiplie par l'ordonnée, y, l'équation $\frac{my^{m-1}}{nax^{n-1}} = \frac{dx}{dy}$, l'on aura : $\frac{my^m}{nax^{n-1}} = \frac{ydx}{dy}$, pour expression de toutes les soutangentes, dans toute espece de courbes ; & attendu que $y^m = ax^n$, cette expression sera encore : $\frac{max^n}{nax^{n-1}} = \frac{ydx}{dy}$; c'est-à-dire, que dans toute espece de courbes la soutangente BM (*Fig.* 33), est toujours égale au produit $m \times ax^n$ de l'exposant m de la grandeur y^m, par la grandeur ax^n, divisé par l'élément nax^{n-1}, de cette même grandeur, valeur qui résulte de la similitude des triangles EDN, DBM, qui donne l'analogie $EN(dy)$: $ED(dx) :: DB(y) : BM$. D'où $BM = \frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{nax^{n-1}} = \frac{max^n}{nax^{n-1}}$. Dans le cas de la parabole quarrée $y^2 = ax$, la soutangente sera par conséquent : $\frac{2 \times ax}{a} = 2x$.

Dans le cas des paraboles cubiques $y^3=ax^2$, $y^3=a^2x$, les ſoutangentes ſeront : $\frac{3\times ax^2}{2ax}=\frac{3}{2}x$, & $\frac{3\times a^2x}{a^2}=3x$.

Dans le cas du cercle $y^2=ax-x^2$, la ſoutangente ſera : $\frac{2\times\overline{ax-x^2}}{a-2x}$, ſi l'équation eſt $y^2=a^2-x^2$, la ſoutangente ſera : $\frac{2\times\overline{a^2-x^2}}{-2x}$.

Dans le cas de l'hyperbole : $y^2=ax+x^2$, la ſoutangente ſera : $\frac{2\times\overline{ax+x^2}}{a+2x}$.

Dans le cas de la parabole renverſée (*fig.* 34) dont nous avons vu que l'équation étoit : $ay=ax-x^2$, la ſoutangente $ED=\frac{1\times\overline{ax-x^2}}{a-2x}$, cette ſoutangente eſt donc la moitié de la ſoutangente EC, du cercle, dont l'expreſſion eſt : $\frac{2\times\overline{ax-x^2}}{a-2x}$, double de $\frac{1\times ax-x^2}{a-2x}$.

Comme toutes les ordonnées de la parabole renverſée $NBOA$, ſont $y=\frac{ax-x^2}{a}$, & que le diviſeur a, eſt une quantité conſtante, il s'enſuit que ces ordonnées ; par exemple, EB, RO ſeront toujours entr'elles, dans différens points de la courbe, comme les rectangles $NE\times EA$,

$NR \times RA$, des parties correſpondantes de l'axe NA, ou, ce qui eſt le même rapport, comme les quarrés des ordonnées EP, RM, correſpondantes, du cercle $NMAN$. Ainſi $BE : OR :: \overline{PE}^2 : \overline{MR}^2$. ou $\overline{MR}^2$ $(\frac{1}{4}a^2) : OR\ (\frac{1}{4}a) :: \overline{PE}^2\ (ax - x^2) : BE\ (y)$; c'eſt-à-dire, que : $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a :: ax - x^2 : y$, ou $a : 1 :: ax - x^2 : y$; d'où $ay = ax - x^2$.

Si la courbe eſt l'hyperbole entre ſes aſymptotes : $a^2 = xy$, ou $a^2x^{-1} = y$, la ſoutangente ſera : $\frac{1 \times a^2x^{-1}}{-1 \times a^2x^{-2}} = -x$.

Si la courbe eſt l'ellipſe : $\frac{a}{b}y^2 = ax - x^2$; ou $y^2 = \frac{abx - bx^2}{a}$, la ſoutangente ſera :

$$2 \times \left.\frac{\frac{abx - bx^2}{a}}{\frac{ab - 2bx}{a}}\right\} = \frac{2 \times \overline{ax - x^2}}{a - 2x}.$$

Si la courbe eſt : $a^3y = \overline{ax - x^2}^2 = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$, la ſoutangente ſera :

$$1 \times \left.\frac{\frac{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4}{a^3}}{\frac{2a^2x - 6ax^2 + 4x^3}{a^3}}\right\} = 1 \times \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a^2 - 6ax^2 + 4x^2}.$$

Cette courbe eſt celle qui réſulteroit du rapport des ordonnées CB, GE... &c.

avec celui des quatrièmes puiſſances des ordonnées *CA*, *GD*, correſpondantes, du cercle *FDAH* (*Fig.* 37); c'eſt-à-dire, que ſi l'on ſuppoſe que $\overline{AC}^4 : \overline{DG}^4 :: BC : EG$, & que cette analogie ait toujours lieu, ſuppoſant le diamètre $FH = a$, & la plus haute ordonnée *BC*, de la courbe *FEBH*, égale à $\frac{a}{16}$, l'équation à cette courbe ſera: $a^3y = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$; car l'on auroit: $\overline{AC}^4 \left(\frac{a^4}{16}\right) : BC\left(\frac{a}{16}\right) :: \overline{DG}^4$ $\overline{(ax - x^2)}^2 : EG(y)$, c'eſt-à-dire, que $\frac{a^4}{16} : \frac{a}{16} :: \overline{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4} : y$. D'où l'on tireroit: $a^3 : 1 :: \overline{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4} : y$, & par conſéquent l'équation: $a^3y = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$.

L'on voit que la quadrature de cette courbe ſeroit: $\dfrac{\frac{a^2x^3}{3} - \frac{2ax^4}{4} + \frac{x^5}{5}}{a^3}$, ſuppoſant $a = x$, cette quadrature ſeroit: $\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{5} - \frac{a^2}{2} = \frac{10a^2 + 6a^2 - 15a^2}{30} = \frac{a^2}{30}$, c'eſt-à-dire, que l'eſpace courbe *FEBH*, ſeroit la trentieme partie du quarré a^2, du diamètre *FH*, du cercle *FAHF*; & comme le rectangle *NPFH*, circonſcrit

à la courbe, eſt $FH \times BC = \frac{a^2}{16}$; il s'enſuit que cet eſpace courbe $FEBH$, ſera au rectangle circonſcrit $PNHF$, comme

$$\left.\begin{matrix}\frac{a^2}{30}\\ \frac{a^2}{16}\end{matrix}\right\} = \frac{16a^2}{30a^2} = \frac{8}{15}.$$

Obſervations ſur les propriétés ſpéciales des Courbes rectifiables.

LA propriété ſpéciale des courbes rectifiables ne conſiſte que dans un point; ſavoir, qu'un arc quelconque de ces courbes peut être diviſé proportionnellement aux parties d'une ligne droite.

Soit une courbe Aon, ſuſceptible de rectification, ſon axe AM (*Fig.* 35). Dès que cette courbe peut être rectifiée, on pourra donc ſuppoſer une tangente AK, qui lui ſeroit égale; menant la corde An, de l'arc Aon, de la courbe, & joignant l'extrémité n, de cette corde, & l'extrémité K, de la tangente par la ligne kn. Si l'on ſuppoſe actuellement une infinité de parallèles Bb, Cc, Dd, Ee... &c.

à la droite *Kn*, & à la même diſtance l'une de l'autre, je dis que ces parallèles couperont la courbe *Aon*, en une infinité d'arcs égaux *Ao*, *oo*, *oo*.... &c.; enſorte que la courbe *Aon*, & les droites *AK*, *An*, ſeront coupées proportionnellement par ces parallèles.

Puiſqu'on ſuppoſe que ces trois lignes ſont coupées par une infinité de parallèles infiniment près l'une de l'autre, & au même intervalle; il s'enſuit que l'extrémité *b*, de la première parallèle *Bb*, ſera infiniment proche du point *A*, origine de la courbe. Donc vers ce point l'arc *Ao*, de la courbe & la tangente *AB*, ſe confondant, ſeront par conſéquent égaux entr'eux, puiſque la courbe eſt ſuppoſée poligone.

Mais la tangente finie *AK*, & la courbe *Aon*, qui lui eſt ſuppoſée égale, ſe trouvent diviſées par les parallèles *Bb*, *Cc*, *Dd*.., &c. dans le même nombre infini de parties; & deux de ces parties vers *A*, étant égales, il s'enſuit que toutes les autres parties des deux lignes ſeront pareillement égales; car les arcs *Ao*, *Oo*, *oo*.... &c. ne peuvent être ſuppoſés croître, ni décroître de *A*, vers *n*, puiſque, dans le premier cas, leur ſomme

excedéroit la tangente *AK*, & que dans le second cas, elle seroit inférieure à cette même tangente, ce qui seroit également contraire à l'hypothèse. Donc les arcs infiniment petits *Ao*, *oo*, *oo*. . . &c. ne pouvant ni croître, ni décroître seront par conséquent égaux entr'eux, & à la tangente infiniment petite *AB*. Donc l'arc *An*, & les droites *AK*, *An*, seront coupés proportionnellement par les parellèles *Bb*, *Cc*, *Dd*. . . &c. à la ligne *Kn*. Et tous les arcs *Ao*, *oo*, *oo*. . . . . &c. égaux entr'eux seront aussi égaux, chacun à chacun, à chaque partie *AB*, *BC*, *CD*. . . . correspondante de la tangente finie *AK*. Mais il est clair que cette égalité subsistera encore dans le cas où ces arcs, & les parties correspondantes de la tangente deviendront des quantités finies, puisque deux tous qui ont le même nombre infini de parties égales sont nécessairement égaux entr'eux.

D'où il suit qu'ayant une courbe rectifiable quelconque *Aon*, si l'on mene à cette courbe une tangente *AK*, par le point *A*, de l'origine, & que cette tangente lui soit égale, tirant la ligne *Kn*, & divisant la tangente *AK*, en tel nombre de parties égales que l'on voudra, par des parallè-

les *Hh*, *Gg*, *Ff*, *Ee*... &c. à la droite *Kn*, cette courbe ſera diviſée, en arcs égaux *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. par les mêmes parallèles.

Et réciproquement ſi on diviſe la courbe *Aon*, & ſa corde *AK*, dans le même nombre de parties égales, tirant par les points de diviſions les lignes *ob*, *oc*, *od*.... &c. qui, ſuivant ce qui vient d'être dit, ſeront parallèles entr'elles; menant enſuite par le point *A*, de l'origine, la tangente indéfinie *AK*, la dernière parallèle *nK*, coupera cette tangente en un point *K*, qui ſera toujours tel que la tangente *AK*, ſera égale à la courbe rectifiable *Aoon*.

REMARQUE.

La propoſition précédente nous développe avec clarté toute la théorie des rectifications. Elle nous montre que deux choſes peuvent rendre ſeules une courbe rectifiable; 1°, La diviſion de ſes arcs en parties égales *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. par des parallèles *ob*, *oc*, *od*.... &c; 2°, La diviſion de la corde *An*, en parties pareillement égales, par les mêmes parallèles. Quand ces deux choſes ſe rencon-

trent. Que les lignes *o b*, *o c*, *o d*. . . . &c. ſont parallèles. Qu'elles diviſent l'arc & la corde en parties égales entr'elles, la courbe eſt toujours rectifiable, puiſqu'en tirant la tangente *A K*, & prolongeant les parallèles juſqu'à la rencontre de cette tangente, les parties *AB*, *BC*, *CD*. . . &c. de cette tangente ſont égales chacune à chaque arc *A o*, *o o*, *o o*. . . . &c. correſpondant de la courbe, & qu'enfin la dernière parallèle *NK*, coupe toujours la tangente en un point *K*, tel que la courbe *A o n*, & la tangente *A K* ſont toujours égales. Mais quand les lignes *o b*, *o c*, *o d*. . . &c. ou ne ſont point parallèles, ou que l'étant, les arcs *A o*, *o o*, *o o*. . . &c. étant faits ou ſuppoſés égaux, les parties *A b*, *b c*, *c d*. . . . &c. correſpondantes de la corde *A n*, ne ſont point égales, ou que celles-ci étant faites ou ſuppoſées égales, les arcs qui leur correſpondent ne ſont pas égaux, ainſi qu'il arrive dans toute eſpece d'arcs circulaires, elliptiques, paraboliques, hyperboliques, & dans une infinité d'autres courbes, dès-lors ces mêmes courbes ne peuvent être ſuſceptibles de rectification, puiſqu'on ne peut en déduire l'égalité de la ſuite des arcs *A o*, *o o*, *o o*. . . . &c, avec la ſuite

des parties correſpondantes *AB*, *BC*, *CD*.... &c. de la tangente, ni par conſéquent l'égalité ultérieure de la tangente *AK*, avec la courbe *Aon*.

Si l'on diviſe, par exemple, le quart de circonférence *ABF* (*Fig.* 36), en parties égales, par les paralléles *AC*, *BR*, *CQ*... &c. les arcs *AB*, *BC*, *CD*.... &c. étant égaux, les parties du rayon *CR*, *RQ*, *QP*.... &c, ni celles de la corde *AF*, ne ſont point égales : ſi au contraire on fait ces parties de rayon, & de corde égales, dès-lors les arcs *AB*, *BC*, *CD*.... &c. ne ſeront plus égaux, ce qui a lieu également dans toutes les ſections coniques, & dans une infinité d'autres courbes. Donc toutes ces courbes ſont irrectifiables ; car il eſt manifeſte que dans ces courbes, la tangente *AK* (*Fig.* 35), & la courbe *Aon*, ſont deux tous qui n'ont pas le même nombre infini de parties égales, comme dans les courbes rectifiables, attendu que ſi *AB*, *BC*, *CD*.... &c. ſont égaux, les arcs correſpondans *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. ne ſont plus égaux entr'eux : & ſi au contraire *Ao*, *oo*, *oo*... &c, ſont ſuppoſés égaux, les parties *AB*, *BC*, *CD*... &c. de la tangente ne ſont plus égales. Donc les

deux tous, c'eſt-à-dire, la courbe *Aon*; & la tangente *AK*, ne pouvant, dans ces courbes, jamais contenir le même nombre infini, ni fini de parties égales, ne pourront par conſéquent, jamais être égaux entr'eux, quelques petites que puiſſent être les parties, dont ces deux tous ſeroient ſuppoſés compoſés.

Il eſt évident qu'afin qu'une courbe *Aon*, puiſſe être égale à une droite *AK*, il faut que ces deux lignes puiſſent être parcourues en même tems, par un point, par exemple, qui dans tous les momens auroit la même vîteſſe; car ce point décrivant les deux lignes, dans le même nombre de momens, & toujours avec la même vîteſſe, il eſt clair qu'en tems égaux, il parcourroit ſur les deux lignes des eſpaces qui ſeroient toujours égaux. Donc la droite *AK*, étant ſuppoſée égale à la courbe *Aon*; il eſt de toute évidence qu'un point mû avec une vîteſſe conſtante, parcourroit ces deux lignes dans le même nombre de momens, & que les parties *AB*, *Ao*, *BC*, *oo*...&c, des deux lignes, décrites en tems égal, ſeroient néceſſairement égales entr'elles. D'où ſuivroit cette proportion : *AK* : *AB* : : *Aon* : *Ao*.

Au contraire les courbes non ſuſceptibles de rectification ſont celles qui ne pourroient être décrites, dans le même nombre de momens qu'une ligne droite par un point ſuppoſé mû avec une vîteſſe conſtante; car il arrivera toujours, ou que les deux lignes ne ſeroient pas décrites dans le même nombre de momens, la vîteſſe du point étant ſuppoſée uniforme, d'où l'on ne pourroit conclure leur égalité, ou que la vîteſſe du point ne ſera point uniforme, ſi on les ſuppoſe parcourues dans le même nombre de momens, d'où il arrivera encore que l'égalité ne pourra en réſulter.

En effet, ſi le point parcourt, par exemple, la tangente *AF* (*Fig.* 37), au cercle *ANOP* d'un mouvement uniforme *AB*, *BD*, *DQ*... &c, dès-lors les arcs *AN*, *NO*, *OP*, qu'il devroit parcourir dans le même tems, afin que l'arc *AP*, fût décrit dans le même nombre de momens que la droite *ABDQF*; dès-lors, dis-je, ces arcs ne ſont plus égaux, & croîtroient en tems égal de *A*, en *P*; d'où il ſuit que dans l'hypothèſe du mouvement uniforme, l'arc *AP*, ne ſeroit plus parcouru dans le même nombre de momens que la droite *AF*, auquel on le

ſuppoſeroit égal. Ainſi cet arc & cette droite ne ſeroient plus égaux, contre la ſuppoſition, puiſqu'ils ne ſeroient point décrits en même tems par un mouvement ſuppoſé uniforme.

Si l'on ſuppoſe au contraire que les deux lignes, ſuppoſées égales ſoient parcourues par le point dans le même nombre de momens; dès-lors les arcs *AN*, *NO*, *OP*.... &c. décrits dans le même tems que les parties *AB*, *BD*.... &c. de la tangente, n'étant point égaux entr'eux, & allant en augmentant de *A* en *P*, la vîteſſe du point doit croître de *A*, en *P*, ce point parcourroit donc plus d'eſpace ſur la courbe *AP*, que ſur la droite *AQ*. Donc alors les deux lignes ne ſeroient plus égales.

Ainſi il eſt impoſſible qu'un point puiſſe décrire, par le même mouvement, une ligne droite égale à quelque partie que ce puiſſe être de la périphérie d'un cercle, d'une ellipſe, d'une parabole, d'une hyperbole.... &c. D'où il réſulte que ces courbes ne ſont point ſuſceptibles de rectification, puiſqu'aucune de leurs parties ne peut être parcourue par le même mouvement, par lequel une ligne droite ſeroit décrite; car ſi la vîteſſe eſt ſuppoſée

la

la même dans la deſcription des deux lignes, elles ne ſeront pas parcourues dans le même nombre de momens : donc l'une ſera toujours plus grande que l'autre, & ſi on les ſuppoſe parcourues dans le même nombre de momens, les vîteſſes avec leſquelles elles ſeront décrites, ſeront différentes, & par conſéquent encore les deux lignes ne pourront être égales.

Les ſeules courbes, ſuſceptibles d'être rectifiées, ſeront donc celles qu'on pourra diviſer en parties égales, ou proportionnelles à celles d'une ligne droite, & qui étant décrites en même tems que le ſeroit une ligne droite, le mouvement du point qui décriroit l'une & l'autre ligne ſeroit uniforme, & le même dans tous les inſtans, ou qui étant ſuppoſées décrites par un mouvement uniforme, & le même que celui qui ſeroit employé à décrire la ligne droite, les deux lignes ſeroient décrites dans le même nombre de momens.

Nommant V, la vîteſſe employée à décrire une ligne droite; T, le tems employé à la deſcription de cette ligne, l'eſpace parcouru, ou la ligne décrite, ſera VT. Or viſiblement pour qu'une ligne courbe puiſſe être égale à une ligne droite VT, il faut qu'elle ſoit exprimée par VT,

c'est-à-dire, que la vîtesse & le tems employés à décrire la courbe soient les mêmes que pour la ligne droite; mais dans une infinité de courbes, & spécialement dans les quatre sections coniques, la vîtesse du point étant supposé *V*, comme dans la ligne droite, le tems *T*, employé à décrire la droite quelconque, est différent du tems *t*, employé à la génération de la courbe; ensorte qu'on n'a point l'égalité $VT = vt$. D'où il suit que nulle ligne droite *VT*, ne peut être égale à un arc quelconque *vt*, de ces courbes.

Si au contraire le tems *T*, est le même pour la génération des deux lignes, les vîtesses seront différentes. La ligne droite quelconque grande ou petite, étant *TV*, la courbe, ou tel arc quelconque que l'on voudroit supposer seroit *Tv*. Mais *TV*, & *Tv*, n'étant point égaux, il en résulte encore que les deux lignes ne pourroient être égales, & en conséquence qu'il n'existe, ni ne peut exister de lignes droites égales à tel arc de ces mêmes courbes que l'on voudroit supposer, ni qui puisse être en rapport fini avec ces mêmes arcs; d'où suit leur état d'irrectification.

Il suit aussi de ce qu'on vient de dire, qu'un arc quelconque *AN* (*Fig.* 35), d'u-

ne courbe rectifiable pourra toujours être divisé en raison donnée ; car ayant menée la tangente *AK*, égale à cet arc, & la droite *KN*, si la raison donnée est comme *m*, à *n*, divisant la tangente *AK*, ensorte que, par exemple, *AG*, soit à *GK*, comme *m*, à *n*, tirant par le point *G*, la parallèle *Go*, à la droite *Kn*, l'arc quelconque *An*, sera divisé au point *o*, dans le rapport de *m*, à *n*; puisqu'en effet l'arc *Ao*, est égal à la partie correspondante *AG*, de la tangente, & que l'arc *on*, est égal à l'autre partie *GK* de cette même tangente.

On voit par-là que si le cercle pouvoit être rectifié, il seroit facile de diviser l'un de ses arcs quelconques *Aon*, dans la raison donnée de *m*, à *n*, & en conséquence, que supposant la rectification du cercle, & une tangente *AK*, égale à l'un de ses arcs quelconques *An*, il sera toujours facile de diviser cet arc dans la raison quelconque de *m* à *n*.

Et réciproquement si l'on pouvoit diviser géométriquement un arc quelconque *An*, de cercle dans la raison donnée quelconque de *m*, à *n*, cet arc seroit toujours rectifiable ; car ayant mené la tangente indéfinie *A*, *B*, *C*, *D*, *E*...*K*, &

divisant ensuite l'arc donné An, en une infinité de parties égales Ao, oo.... &c. Il est clair que vers le point A, le petit arc Ao, seroit égal à la tangente AB, avec lequel il se confondroit ; prenant ensuite sur la tangente indéfinie A, B, C, D... K, des parties BC, CD, DE... &c. égales entr'elles, & à l'arc Ao, & menant par les points de division de l'arc & de la tangente les droites Bo, Co, Do... &c ; l'on auroit toujours $AB = Ao$, $BC = oo$, $CD = oo$.... $HK = on$. Si l'on suppose actuellement la corde An, divisée dans le même nombre de parties égales. Il est clair que l'on auroit : AB : BC : : Ab : bc, AC : CD : : Ac : cd... &c. ce qui prouve que les petites droites Bo, Co : Do. Eo... &c. seroient parallèles entr'elles, puisqu'elles diviseroient la tangente & la corde en parties égales. Menant donc du point extrême n, de l'arc donné, la parallèle nk, à la petite droite Bob, cette droite couperoit la tangente en un point K, tel que l'arc de cercle Aon, seroit égal à la tangente AK ; d'où il suivroit que les arcs Ao, oo, oo... &c. étant égaux, les parties correspondantes de la tangente AB, BC, CD... &c. seroient égales, ainsi que les parties corres-

pondantes Ab, bc, cd... &c. de la corde An, égalité qui ſubſiſteroit encore lorſque ces arcs, & ces parties de la tangente, & de la corde deviendroient finies, puiſque les arcs finis Ao, oo... &c. ne ſeroient que le réſultat d'une infinité de petits arcs égaux, & que les parties finies AB, BC... &c. Ab, bc... &c. de la tangente & de la corde ne ſeroient de même que le réſultat du même nombre infini de petites parties égales. Ainſi à des arcs finis égaux Ao, oo... &c. correſpondroient des parties AB, BC... &c. Ab, bc... &c. finies & égales de la tangente, & de la corde (ce que nous avons vu ne pouvoir être). Donc alors il ſeroit très-facile de déterminer une tangente finie AK, égale à l'arc donné Aon : car diviſant l'arc Aon, & la corde An, dans le même nombre fini de parties égales, par exemple, en huit parties, menant par les points de diviſion les droites Bb, Cc, Dd... &c. toutes ces lignes ſeroient parallèles entr'elles, par ce qui vient d'être dit : donc alors la dernière parallèle KN, termineroit au point K, la tangente AK, égale à l'arc donné Aon. La tangente AH, ſeroit égale à ſon arc correſpondant Ao, & les tangentes AG,

AF. . . &c. *A B*, égales aux arcs correſpondans *A o*, *A o*. . . . &c.

Ainſi c'eſt le même problême de rectifier le cercle, ou de couper l'un de ſes arcs quelconques en raiſon donnée; car ſi l'on pouvoit diviſer l'arc quelconque *A o n*, ſuivant une raiſon donnée, on pourroit diviſer cet arc en parties proportionnelles à celles de la corde *A n*, & de la tangente *A K*, par les parallèles *B b*, *C c*, *D d*. . . . *K n*. D'où ſuivroit la rectification de cet arc, qui ſeroit égal à la tangente *A K*.

Les lignes *B b*, *C c*, *D d*. . . *K n*, étant ſuppoſées parallèles, l'on voit que ce qui empêche l'arc *A o n*, d'être égal à la tangente *A K*, c'eſt parce qu'alors les arcs *A o*, *A o*, *A o*. . &c. ne ſont plus proportionnels aux parties correſpondantes de la corde & de la tangente; & il eſt ſi vrai que c'eſt en ce point ſeul que conſiſte toute la difficulté de la rectification, que lorſque cette difficulté eſt ſuppoſée vaincue, & que l'on ſuppoſe, comme dans la génération de la ſpirale, & de la quadratrice, la circonférence du cercle, ou quelqu'une de ſes parties, diviſées proportionnellement aux parties d'une ligne droite, qui, dans ces deux cas, eſt le

rayon du cercle, dès-lors le cercle devient rectifiable, dans l'hypothèse toutefois où ces deux courbes seroient considérées comme géométriques ; car la tangente à la spirale est égale à la circonférence du cercle générateur, & la base de la quadratrice est troisième proportionnelle au quart de circonférence, & au rayon. Mais qu'arrive-t-il? On retombe alors dans des courbes méchaniques, & transcendantes ; ensorte qu'on ne peut plus mener géométriquement une tangente à la spirale, ni déterminer géométriquement le point ultérieur de la quadratrice, & la difficulté de rectifier le cercle ne fait que changer de face, & se présenter sous une autre forme.

La propriété spéciale d'une courbe rectifiable, sera donc telle qu'étant supposée divisée en une suite finie d'arcs égaux *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. divisant la corde *An*, dans le même nombre fini de parties égales entr'elles, les lignes *ob*, *oc*, *od*... &c. menées par les points de division des deux lignes, seront toujours parallèles entr'elles ; & cette propriété ne se rencontrera dans les autres courbes, telles que le cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole... &c, que dans le seul cas où le nom-

bre des ſections des deux lignes ſeroit ſuppoſé infini ; car dans tout nombre fini de ſections de l'arc *Aon*, & de la corde *An*, les lignes *ob*, *oc*, *od*. . . . . &c, menées par les points de diviſion ne ſeront point parallèles dans ces courbes, ce qui fait qu'elles ne ſeront point rectifiables en termes finis, mais ſeulement par une ſuite infinie ; attendu que ce n'eſt que dans l'infini, c'eſt-à-dire, que dans le cas où l'arc *Aon*, & la corde *An*, ſeroient diviſés dans le même nombre infini de parties égales que les lignes *ob*, *oc*, *od*. . . &c, pourront être parallèles : voilà pourquoi le calcul n'aſſigne la rectification de ces courbes que dans l'infini, ce qui eſt équivalent à n'aſſigner aucune rectification, ou à réduire cette rectification purement imaginaire & chimérique, à zéro.

II. REMARQUE.

La quadratrice *AefgB*, de Dinoſtrate, imaginée d'abord tant pour rectifier le cercle, que pour diviſer un angle en raiſon donnée, eſt une courbe qui ſert merveilleuſement à démontrer d'une manière fort ſimple, & fort élégante, l'impoſſibilité de rectifier, & de quarrer le cer-

cle. On ſait que cette courbe ſuppoſe que le quart *A D*, de circonférence de cercle, & le rayon *A C*, ſeroient diviſés dans le même nombre infini de parties égales entr'elles, par les lignes *Ch*, *Ci*, *Ck*, *CD* & *Le*, *Mf*, *Ng*, *CB*. La rencontre de ces lignes, aux points *e*, *f*, *g*, *B*, forme autant de lieux à la quadratrice *AefgB*. Or, on démontre, même avec la plus grande facilité, que la baſe *CB*, de la quadratrice ſeroit troiſième proportionnelle au quart de circonférence *AD*, & au rayon *AC*; car ſuppoſant le point *N*, infiniment près du point *C*, & élevant aux points *B*, *D*, les tangentes ou perpendiculaires *Bg*, *Dk*, l'on aura $Dk = \frac{AD}{\infty}$, & $Bg = NC = \frac{AC}{\infty}$; mais les triangles *CDk*, & *CBg*, étant ſemblables, donneront cette analogie : $Dk\left(\frac{AD}{\infty}\right) : CD :: NC\left(\frac{AC}{\infty}\right) : CB$, c'eſt-à-dire : $\frac{AD}{\infty} : CD :: \frac{AC}{\infty} : CB$; d'où on tirera CB

$$= \left\{\frac{\frac{AC \times CD}{\infty}}{\frac{AD}{\infty}}\right\} = \frac{AC \times AC}{AD},$$ & par conſéquent

$AD = \frac{AC \times AC}{CB}$; c'eſt-à-dire, que le quart

AD, de circonférence, feroit égal au quarré du rayon *AC*, divifé par la bafe *CB*, de la quadratrice. D'où il fuit que cette bafe étant fuppofée connue & déterminée, la quadrature & la rectification du cercle s'enfuivent néceffairement; & réciproquement fi l'on pouvoit quarrer, ou rectifier le cercle, par quelque méthode que ce fût, l'on détermineroit géométriquement la bafe *CB*, de la quadratrice, qui eft toujours égale à $\frac{AC \times AC}{AD}$.

Or il réfulte, de la conftruction même de la quadratrice, que fa bafe *CB*, eft indéterminable, puifque pour déterminer cette bafe, il faudroit pouvoir déterminer le point ultérieur *B*, d'interfection de la dernière perpendiculaire *CB*, & du dernier rayon *CD*, ce qui eft impoffible, ces deux lignes fe confondant, & par conféquent ne fe coupant plus, lorfque leur point d'interfection devroit fe trouver fur le rayon *CD*, comme, par exemple, dans un point *B*. Si donc on rectifioit le cercle, par une méthode quelconque, on pourroit affigner alors le point ultérieur *B*, de la quadratrice, & on détermineroit alors une chofe impoffible; favoir, l'interfection dans un point *B*, de la dernière

perpendiculaire *CB*, & du dernier rayon *CD*, tandis que ces deux lignes ſe confondent dans la droite *CBD*, & ne ſe coupent plus, dès que le point ultérieur de la quadratrice ſeroit placé, comme il eſt évident qu'il devroit l'être, ſur quelque point *B*, du rayon *CD*. Par conſéquent la quadrature & la rectification du cercle ſuppoſent une choſe impoſſible, & même abſurde.

Une quantité, ſuppoſée indéterminable de ſa nature, n'exiſtant point, & ne pouvant exiſter, eſt néceſſairement égale à zéro, puiſque cette quantité ne différeroit en rien du néant. Le produit d'une telle quantité, par une quantité réelle, doit donc être égal à zéro. Si donc la baſe de la quadratrice eſt une pure chimère, qui ne ſauroit exiſter, il faut prouver qu'en effet étant multipliée par une quantité réelle, telle que ſeroit, par exemple, le rayon *AC*, du cercle, leur produit $AC \times CB = 0$.

Soient donc x, les abſciſſes *AL*, *AM*...&c. de la quadratrice; & y, les ordonnées correſpondantes *Le*, *Mf*.... &c. Nommant t, les tangentes *Ah*, *Ao*, *Ap*.... &c. correſpondantes à ces ordonnées & priſes ſur une perpendiculaire élevée ſur l'extrémité *A*, du rayon *CA*; l'on aura, à tous les points de la

courbe, l'analogie : $r : t :: r - x : y$. r, eſt ici le rayon AC; d'où réſultera l'équation $ry = tr - tx$; mais quand y, devient la baſe CB, de la quadratrice, x, devient le rayon AC; l'on a donc alors $x = r$; ſubſtituant donc r, à x, l'on aura, pour équation à la quadratrice, dans le cas où l'ordonnée $y = CB$; $ry = tr - tr = 0$. D'où il ſuit que $r \times y$, ou $AC \times CB = 0$. Mais r, ou AC, eſt une quantité réelle; donc y, ou CB, n'exiſtera point, & ſera une quantité égale à zéro, puiſqu'étant multipliée par r, le produit $ry = 0$. Si donc la baſe CB, de la quadratrice eſt purement chimérique, & dès-là égale à zéro, ce qui eſt évident, il s'enſuit démonſtrativement que la rectification du cercle, & ſa quadrature même définie, ſont impoſſibles, puiſqu'on ne pourroit les ſuppoſer ſans que la détermination de la baſe CB, de la quadratrice ne s'enſuivît, & ſon égalité avec quelque quantité réelle CB, qui dès-lors ſeroit une portion finie, & déterminée du rayon AC, & par conſéquent, il ne ſeroit plus vrai alors que $ry = 0$, puiſque y, ſeroit une partie déterminée & finie du rayon r, ou, pour mieux dire, le rectangle ry, auroit alors deux valeurs bien différentes; (ce qui ne

peut être) & qui ne différeroient entr'elles par l'infini ; car d'une part $ry = o$ (dans le cas où $x' = r$), & d'autre part $ry = AC \times CB$ qui seroit une quantité réelle, & un produit du rayon AC, par une partie finie & déterminée CB, de ce même rayon, ce qui seroit absurde. La rectification du cercle, & sa quadrature même définie sont donc impossibles.

III. *Remarque.*

On se souvient d'avoir communiqué à M. Bézout, il y a quelques années, cette démonstration contre la possibilité de rectifier & de quarrer le cercle. Ce Géométre, en convenant qu'en effet il étoit impossible d'assigner géométriquement le point ultérieur B, de la quadratrice, opposa, à cette démonstration, que l'on pouvoit toujours supposer que le dernier rayon CD, & la dernière perpendiculaire, ou ordonnée Ng, se coupoient dans un point, infiniment près du point B. Il est évident que cette objection se détruit par elle-même, & par les principes même sur lesquels la méthode des infiniment-petits est appuyée; car dès qu'on suppose que le point d'intersection seroit infiniment

près de la ligne ou rayon *CB*, on peut le ſuppoſer placé, ſans erreur ſenſible, ſur le rayon *CB* lui-même. D'où il ſuivroit que ce point exiſteroit, & n'exiſteroit pas en même tems, ce qui eſt abſurde.

Quand le point d'interſection *g*, des deux lignes *Ng*, *CK*, eſt ſuppoſé infiniment près du dernier rayon *CD*, il eſt évident que l'angle *ACg*, approche alors infiniment de la valeur d'un angle droit; c'eſt-à-dire, de la valeur de l'angle *ACD*. Donc alors l'angle formé en *g*, devient infiniment petit à l'égard des angles formés en *N*, & en *C*, & peut être ſuppoſé nul, puiſqu'il ſeroit effectivement nul à leur égard : donc alors les deux lignes *Ng*, *CD*, ne ſe couperoient plus, pas même dans un point infiniment voiſin du rayon *CD*, comme le prétendoit M. Bézout; puiſque l'angle formé en *g*, ſeroit ou nul, ou pourroit toujours être conſidéré comme tel.

On voit, par ce dernier expoſé, combien M. Bézout abuſe de la méthode des infiniment-petits, & qu'il n'eſt pas étonnant que quelqu'un qui réduit cette méthode à ſa juſte valeur, en la conſidérant comme une ſimple hypothèſe, qui ne peut rien changer à la nature des cho-

ſes, ne puiſſe ſe rencontrer avec lui. Ce défaut de concours avec les idées particulières à M. Bézout, eſt toujours qualifié par lui de *ſentimens, de propoſitions...* *&c. contraire à des vérités démontrées, ou aux ſentimens des Géomètres.... &c.*

Il eſt démontré, & M. Bézout en convient lui-même, que le point ultérieur *B*, de la quadratrice qui devroit ſe trouver ſur le dernier rayon *CD*, ne peut en même tems y être déterminé. D'où on conclut la non exiſtence de ce point. Or, que fait ici M. Bézout? Il met la Géométrie en contradiction avec elle-même, en telle ſorte que le point ultérieur de cette courbe exiſteroit, & n'exiſteroit pas en même tems. Ce point n'exiſteroit pas en le ſuppoſant placé ſur le dernier rayon *CD*, de la quadratrice qui eſt le lieu légitime où il devroit ſe trouver : mais il exiſteroit ſuivant M. Bézout, en le plaçant ſur un rayon ſuppoſé infiniment voiſin du dernier rayon *CD*, & qui au fond ſeroit toujours le même rayon *CD*, par l'hypothèſe même des infiniment-petits. Donc ce point exiſteroit, & n'exiſteroit pas en même tems, ce qui eſt abſurde. M. Bézout n'a pas fait attention que l'hypothèſe d'un, de deux, de trois... &c. rayons, ſuppo-

ſés infiniment près du dernier rayon *CD*, ne peut rien changer à la nature des choſes, ni faire exiſter ce qui n'exiſte point. Si le point ultérieur de la quadratrice ne peut exiſter ſur le dernier rayon *CD*, comme M. Bézout en convient, il doit convenir auſſi qu'il ne peut exiſter davantage ſur aucuns des rayons infiniment voiſins de ce dernier rayon, à cauſe que tous ces rayons peuvent toujours être conſidérés comme le même rayon *CD*, & que ce qui ſeroit dit & démontré de celui-ci, conviendroit également à tous les autres. Voilà la maniere légitime de ſe ſervir de l'hypothèſe des infiniment-petits. Si M. Bézout vouloit bien en faire le même uſage, & avoir des idées plus juſtes ſur cette matière, on s'accorderoit alors avec lui.

On peut encore prouver directement que la baſe de la quadratrice eſt égale à zéro. L'équation, à cette courbe, étant $ry = tr - tx$, comme il vient d'être dit, l'ordonnée $y = \frac{tr}{r} - \frac{tx}{r} = t - \frac{tx}{r}$. Mais quand l'ordonnée y, deviendroit la baſe de la quadratrice, l'abſciſſe x, deviendroit le rayon r, ou *AC*; ainſi dans ce cas $r = x$, l'on auroit donc $y = t - \frac{tx}{r}$

$= t$

$=t-t=o$. Donc la baſe, ou plus grande ordonnée de la quadratrice, eſt $y=o$; & voilà pourquoi le produit de cette baſe par le rayon r, eſt égal à zéro, comme il a été prouvé. L'on voit que cette réduction à zéro de la baſe de la quadratrice, ne marque autre choſe, ſinon que cette baſe, ou plus grande ordonnée, ne peut être déterminée, comme les autres ordonnées *Ng*, *Mf*.... &c. de cette courbe, par l'interſection d'un rayon *cg*, & d'une perpendiculaire *Ng*, au rayon *AC*, attendu que ce rayon, & cette perpendiculaire, ſe confondent dans la droite *CD*, & par conſéquent, ne ſe coupent plus; leur point d'interſection devenant zéro, lorſque ce point devroit ſe trouver ſur le dernier rayon *CD*, comme dans quelque point *B*. Par conſéquent le point d'interſection du dernier rayon *CD*, & de la dernière perpendiculaire *CB*, étant nul, ou zéro, il eſt clair que la baſe *CB*, de la quadratrice ne peut être que nulle ou zéro, ainſi que toute ordonnée *Ng*, qui différeroit infiniment peu de cette même baſe. Ceci paroît répandre beaucoup de jour ſur la nature des ſuites infinies, dont on ſe ſert pour la quadrature, ou rectification du

cercle. On croit communément que si on avoit la somme de ces suites, l'on quarreroit & l'on rectifieroit le cercle ; & il paroît résulter des observations que nous venons de faire, sur la quadratrice, que la somme de la plupart du moins de ces suites devroit se réduire à zéro, bien loin de donner la quadrature, ou la rectification du cercle ; car on pourroit réduire ces suites à exprimer la base CB, de la quadratrice, dont la détermination donneroit & la quadrature, & la rectification du cercle. Supposons donc qu'en prenant une certaine quantité de termes de ces suites, & négligeant les autres, on déterminât toujours quelques fonctions des ordonnées Le, Mf, Ng... &c. de la quadratrice, lesquelles donneroient la quadrature ou la rectification du cercle, toujours plus rapprochée, à proportion qu'en prenant un plus grand nombre des termes de la suite, on détermineroit une ordonnée Ng, plus voisine du dernier rayon CD de la quadratrice : cela posé, il est évident que la somme de tous les termes de ces suites exprimeroit la base, ou plus grande ordonnée de la quadratrice, qui se confondroit dans le dernier rayon CD. Donc la somme entière de

ces ſuites ſeroit égale à zéro, bien loin de donner la rectification ou la quadrature du cercle, puiſque cette ſomme entière ſeroit, par l'hypothèſe, égale à la baſe de la quadratrice qui eſt égale à zéro.

L'on voit que ſi l'on prenoit pour baſe de la quadratrice, une ordonnée *Mf*, ou *Ng*. . . &c. qui ſeroit toujours plus voiſine du dernier rayon *CD*, on approcheroit de plus en plus de la rectification, & de la quadrature du cercle; mais l'on n'en doit pas conclure, comme l'on fait ordinairement, que ſi on en approchoit à l'infini, l'on obtiendroit enfin cette rectification & cette quadrature; attendu qu'alors l'ordonnée *Ng*, ſeroit ſur le dernier rayon *CD*, où elle ſe réduiroit à zéro, par le défaut d'interſection du dernier rayon avec la dernière perpendiculaire; car il importe d'obſerver qu'une quantité ſe réduit à zéro de différentes manières, & par un décroiſſement ſucceſſif & infini de cette même quantité, & par l'évanouiſſement de conditions auxquelles ſon exiſtence ſeroit attachée, & dont cette quantité dépendroit, comme ici l'interſection des rayons, & des perpendiculaires qui ſeule doit donner l'exiſtence à toutes les ordonnées *Le*, *Mf*, *Ng*. . . &c. de la courbe,

ſans en excepter la baſe, ou plus grande ordonnée de cette même courbe.

Si l'on déterminoit donc une ordonnée *Ng*, de la quadratrice, toujours plus près du dernier rayon *CD*, & qu'on prît cette ordonnée pour la baſe même de la quadratrice, cette ordonnée ſeroit à peu près troiſième proportionnelle entre le quart *AD*, de circonférence, & le rayon *AC*; ce qui donneroit à peu près $AD = \frac{AC \times AC}{Ng}$. Mais dans le cas où *Ng*, ſeroit ſur le dernier rayon *CD*, dès-lors $Ng = o$, & l'on auroit : $AD = \frac{AC \times AC}{o}$ qui eſt une expreſſion toute ſemblable à celle de la quadrature de l'hyperbole, conſidérée entre ſes aſymptotes, dont l'équation étant $aa = xy$, la quadrature ſe réduit à : $\frac{a^2}{o}$: car ſuppoſant $a = AC$, l'on auroit, pour valeur du quart de circonférence, $AD = \frac{a^2}{o}$, & pour valeur de la quadrature de l'hyperbole la même quantité $\frac{a^2}{o}$, en obſervant toutefois que le zéro qui diviſe a^2, dans l'équation $AD = \frac{a^2}{o}$, exprime une ligne qui s'eſt évanouie, non point par une ſuite infinie de décroiſſemens, mais

par l'évanouiſſement d'un point d'interſection de deux lignes, néceſſaire à l'exiſtence de cette premiere ligne ; & que le zéro qui diviſe la même quantité a^2, dans le cas de la quadrature de l'hyperbole, n'exprime qu'un nombre évanoui, par lequel il faudroit diviſer a^2, pour avoir la quadrature de cette derniere courbe. Mais il s'enſuit toujours que la rectification, & par conſéquent la quadrature du cercle, & la quadrature de l'hyperbole ſe réduiſent au même problême, & au même degré d'impoſſibilité, exprimé par $\frac{a^2}{o}$; puiſque, pour le cercle, zéro exprime l'évanouiſſement d'une ligne qui diviſant le quarré a^2, du rayon, pouvoit ſeule donner pour quotient le quart de circonférence, & pour l'hyperbole l'évanouiſſement d'un nombre, par lequel ſeul on devoit diviſer le quarré a^2, pour avoir la quadrature de cette courbe. On voit donc que dans ces deux courbes, les quantités par leſquelles ſeules on pouvoit en obtenir la quadrature n'exiſtent point, puiſqu'elles s'y réduiſent à zéro.

En général tout problême qui finit par ſe réduire à une expreſſion de l'eſpece de celle-ci : $\frac{A}{o}$, marque toujours que la

chose qu'on s'étoit proposé de trouver est impossible, par l'évanouissement d'un nombre, d'une ligne, d'une quantité enfin, par laquelle seule la chose demandée pouvoit exister & être obtenue, & dont zéro a pris la place. Or cette quantité se réduisant à zéro, il est clair que la chose que l'on cherchoit ne pourra exister, puisque son existence dépendoit de l'existence de cette même quantité évanouie.

Par exemple, l'expression de toutes les soutangentes, dans le cercle, étant : $\frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$. Dans le cas ou $x = \frac{1}{2}a$, dès-lors $2x = a$, & l'expression de la soutangente CT se réduit à $\frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{2ax - 2x^2}{0} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{0}$ qui est encore une expression toute semblable à celles que nous venons de trouver pour la rectification du cercle, & pour la quadrature de l'hyperbole. Il est évident que, dans ce cas, la soutangente CT, cesse d'exister, parce qu'elle devient parallèle à la tangente DV, qui par conséquent ne peut plus la couper dans aucun point, & lui donner l'être par cette intersection : car l'existence de toutes les soutangentes dépend de leur intersection avec les tangentes correspondantes, & cette

interſection dépend elle-même du rapport de l'abſciſſe x, avec le rayon $\frac{1}{2}a$ du cercle, ou de l'exiſtence d'une ligne exprimée par $a - 2x$. Quand il arrive donc que la ligne $a - 2x$, ſe réduit à zéro, cette ligne n'exiſtant plus, il eſt clair que la ſoutangente CT, qui recevoit l'être de cette même ligne, ne pourra exiſter davantage; ce qui eſt le ſens de ces expreſſions dont ſe ſervent les Géomètres, lorſqu'ils diſent que dans ce cas la ſoutangente CT, *devient infinie*; c'eſt-à-dire, ceſſe d'exiſter, & d'être déterminée, à la manière de toutes les autres ſoutangentes. Il eſt donc impoſſible, dans ce cas, de réſoudre le problême qui auroit pour objet la détermination de la ſoutangente CT; ou pour mieux dire, ce problême ſe trouve tout réſolu, en diſant que cette ligne n'exiſte point, ou eſt infinie, indéterminable & égale à zéro, ce qu'on peut même prouver directement en cette manière. Si l'on nomme S, toutes les ſoutangentes du cercle, l'on aura $S = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$, & par conſéquent, $a - 2x = \frac{2ax - 2x^2}{S}$; mais dans le cas où $x = \frac{1}{2}a$, l'équation ſera $0 = \frac{\frac{1}{2}a^2}{S}$. Donc alors, multipliant par la ſoutangen-

te S, le produit ſera : $0 = \frac{1}{2}a^2$; mais puiſque $\frac{\frac{1}{2}a^2}{S} \times S = 0$, c'eſt une néceſſité que $S = 0$; c'eſt donc la même choſe de dire que la ſoutangente CT, devient infinie, ou qu'elle n'exiſte point, & qu'elle eſt réduite à zéro. Si l'on exprimoit donc cette ſoutangente par une ſuite infinie, il eſt clair qu'il ne ſeroit pas exact de dire que la ſomme de cette ſuite donneroit une quantité réelle qui ſeroit l'expreſſion de cette ligne ; puiſque cette ligne étant zéro, la ſomme des termes infinis de la ſuite, par laquelle elle ſeroit exprimée, ne pourroit ſe réduire qu'à zéro. Il ſuit de ces obſervations que l'on n'a pas lieu de regretter les méthodes qui pourroient conduire à la ſommation des ſuites relatives à la quadrature, & à la rectification du cercle, puiſqu'il paroît que la ſomme de ces ſuites devroit pour la plupart toujours finir par ſe réduire à zéro, comme celle par laquelle on exprimeroit la ſoutangente CT, du cercle, dans le cas ou $x = \frac{1}{2}a$. La quadrature, & la rectification du cercle n'étant pas plus poſſibles que la détermination de la ſoutangente CT, il s'enſuit qu'une quantité rectiligne A, à laquelle la ſuite infinie tendroit à égaler le cercle,

ou sa circonférence, n'existant point, ou étant zéro, la somme entière de la suite seroit toujours $S. = A = 0$. Quand la quadrature, ou la rectification du cercle s'expriment seulement par voie d'approximation, alors la quantité rectiligne qu'on suppose égale au cercle, ou à sa circonférence, est toujours réelle & ne se réduit point à zéro : par exemple, une ordonnée *Ng*, de la quadratrice, déterminée à une distance finie du dernier rayon *CD*, qu'on supposeroit égale à la base de cette courbe, & qui dès-là feroit obtenir une quadrature, & une rectification approchées du cercle, existera toujours, puisque cette ordonnée seroit déterminée par l'intersection du rayon *Cgk* : ainsi la suite qui exprimeroit cette ordonnée ne se réduiroit point à zéro. Mais on voit qu'il ne doit pas en être de même lorsque cette ordonnée devroit être déterminée sur le rayon *CD* ; cette ligne se réduisant alors à zéro, la suite par laquelle elle seroit exprimée ne pourroit que se réduire également à zéro. Ainsi le problême, touchant la quadrature & la rectification du cercle, se réduit à déterminer une quantité rectiligne *Ng*, le plus près qu'il seroit possible d'un lieu *CD*, de la vraie quadrature,

& rectification, & où par cela même la quantité rectiligne qui tendroit à être égale au cercle, ou à une partie déterminée quelconque de sa circonférence, se réduiroit à zéro.

Observations sur les propriétés spéciales des Courbes quarrables.

IL en est des quadratures des courbes comme des rectifications. Tout espace courbe qui pourra être divisé en raison donnée pourra toujours être quarré, & au contraire tout espace courbe qui ne sera pas susceptible d'une telle division ne sera pas quarrable.

Soit supposée une courbe quarrable quelconque *ADHF* (*fig.* 39); cette courbe étant, par l'hypothèse, susceptible de quadrature, on pourra donc la supposer égale à un rectangle *ABGF*, formé du produit de son axe *AF*, par l'une de ses ordonnées *ED*. Or, pour déterminer cette ordonnée *ED*, il est clair qu'il faut que l'espace courbe *ADHF*, soit susceptible d'être divisé, suivant une raison donnée, qui, dans le présent exemple, sera la rai-

ſon de la portion d'eſpace courbe *AED*, à la portion *EDHF* : le rapport entre ces deux eſpaces détermine néceſſairement l'ordonnée *ED*, qui étant multipliée par l'axe *AF*, donne un produit égal à tout l'eſpace courbe *ADHF*.

Et à raiſon de ce que la plus grande ordonnée *FH*, peut être priſe plus près ou plus loin du point *A*, de l'origine, & que dans tous les cas poſſibles, il s'agit toujours de déterminer l'ordonnée *ED*, qui fait trouver la quadrature de la courbe, relativement aux différens points de l'axe *AF*, l'on voit que la propriété ſpéciale des courbes quarrables, ſera de pouvoir être diviſée ſuivant une raiſon donnée. Ces courbes ayant cette propriété, & toute propriété d'une courbe étant renfermée dans ſon équation, il s'enſuit qu'une courbe quarrable ſera celle de l'équation de laquelle on pourra toujours déduire une ordonnée finie *ED*, qui étant multipliée par l'axe *AF*, donnera la quadrature de cette courbe. Et au contraire les courbes non quarrables ſeront celles de l'équation deſquelles on ne pourra déduire une telle ordonnée, attendu que ces courbes ne pourront être diviſées en raiſon donnée, & en conſéquence, que l'ordonnée

néceſſaire pour la quadrature, ne ſe trouvant point dans ces courbes, on ne pourra par conſéquent la déduire de leur équation.

Cette ordonnée eſt un élément commun à la courbe *ADHF*, & au rectangle *ABGF*, de manière que cet élément parcourt, le long de l'axe *AF*, le même eſpace; croiſſant dans la courbe de *E*, en *F*, & décroiſſant de la même quantité de *E*, en *A*, il eſt clair qu'il parcourt autant d'eſpace dans la courbe, par cet accroiſſement & ce décroiſſement égal, qu'il en parcourt dans le rectangle en demeurant toujours le même. Un élément qui croît & décroît de la même quantité, ne parcourt dans le même nombre de momens, ni plus ni moins d'eſpace que s'il étoit conſtant.

Ainſi l'ordonnée, dont la détermination donne la quadrature de la courbe, aura cette propriété particulière, de croître & décroître de la même quantité dans la courbe, enſorte que l'eſpace qu'elle y parcourra ſera toujours égal à celui qu'elle parcourroit, dans le même nombre de momens, en demeurant conſtante. Ceci nous fait comprendre comment une quantité variable peut décrire préciſément le

même eſpace qu'une quantité conſtante, c'eſt quand la variation par accroiſſement eſt égale à la variation par décroiſſement, alors la quantité conſtante eſt comme un terme moyen entre ces deux variations par excès, & par défaut, ce qui fait que la grandeur produite par la quantité variable eſt alors égale à la grandeur engendrée par la quantité conſtante. Il n'y a point d'autre manière de concevoir l'égalité entre deux grandeurs, dont l'une ſeroit le réſultat d'un élément variable, & l'autre le produit d'un élément conſtant.

Nous devons juger delà que ce n'eſt que dans quelques cas particuliers où un élément variable produira une grandeur égale à une grandeur dont les élémens ſeroient conſtans, puiſqu'il faut que l'élément variable croiſſe & décroiſſe préciſément de la même quantité, & à raiſon de ce qu'il y a un beaucoup plus grand nombre de cas, où le décroiſſement ſeroit plus grand ou plus petit que l'accroiſſement, il s'enſuit qu'il y aura beaucoup plus de courbes non quarrables que de quarrables.

Les ordonnées d'une courbe géométrique, toujours exprimées par ſon équation,

ſont finies par leur nature, puiſqu'elles ſont toutes d'eſpèce à pouvoir être déterminées avec la règle, & le compas.

S'il arrivoit donc qu'une courbe eût une ordonnée qu'on ne pût exprimer que par une ſuite infinie, ou, ce qui revient au même, qui fût égale à une ligne courbe non rectifiable, il eſt évident qu'une telle ordonnée, ne pouvant être déterminée avec la règle & le compas, ne pourroit, par conſéquent, être déduite de l'équation finie de la courbe.

Mais c'eſt là préciſément ce qui ſe rencontre dans les courbes non quarrables; l'ordonnée, dont la détermination en termes finis feroit trouver la quadrature de la courbe, y eſt toujours égale ou à une ligne courbe non rectifiable, ou à une ſuite infinie non ſommable.

Dans le cercle, par exemple, l'ordonnée ED, qui donneroit la quadrature du quart de cercle $ADHF$, y eſt égale à la moitié de l'arc ADH, ou à l'arc de 45 degrés. Or évidemment une telle ordonnée ne peut être déduite de l'équation finie du cercle, $y^2 = ax - x^2$, ou $y^2 = a^2 - x^2$. Pour avoir l'expreſſion de cette ordonnée qui eſt, $y = \sqrt{ax - x^2}$, ou

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$, on eſt obligé de réduire le radical en ſuite infinie, & de transformer par-là l'équation finie du cercle en équation infinie. Ainſi au point *E*, de l'axe, ou rayon *A F*, correſpondant à l'ordonnée *E D*, dont la détermination donneroit la quadrature du quart de cercle, l'équation finie du cercle y eſt transformée en équation infinie, & dès-là l'ordonnée *ED*, n'eſt plus ſuſceptible d'être exprimée en termes finis. D'où il ſuit que le cercle ne peut être ſuſceptible de quadrature finie; toute ordonnée finie par laquelle on voudroit multiplier le rayon *AF*, étant toujours plus grande, ou plus petite que l'ordonnée indéfinie *E D*, qui donneroit la quadrature ou quart de cercle *A D H F*.

M. Deſcartes a très-bien remarqué qu'il y avoit des quantités qui n'étoient ni finies, ni infinies, mais indéfinies; l'ordonnée *E D*, qui feroit trouver la quadrature du cercle, en eſt un exemple : cette ordonnée n'eſt point infinie, puiſqu'on peut en déterminer une plus grande; elle n'eſt point finie non plus, puiſque toute ordonnée finie ſera plus grande ou plus petite que l'ordonnée *E D*. Donc cette ordonnée ſera néceſſairement indéfinie.

Mais une quantité indéfinie étant, par

ſa nature, toujours plus grande ou plus petite qu'aucune quantité finie que ce ſoit, il s'enſuit qu'elle ne pourra être exprimée analytiquement que par une ſuite infinie; & cette ſuite ne pourra en même tems être ſommée, puiſque la quantité ne ſeroit plus indéfinie, ſi la ſuite par laquelle elle ſeroit exprimée étoit ſommable.

Ainſi une courbe non quarrable eſt celle qui n'a aucun élément, ou ordonnée finie *ED*, ſuſceptible de décroître de *E* en *A*, de la même quantité préciſément dont elle croîtroit de *E* en *F*; l'accroiſſement & le décroiſſement ne ſe trouvant jamais exactement égal dans cette courbe avec une ordonnée quelconque finie, qui parcourroit telles parties *EA*, & *EF*, de l'axe qu'on voudroit ſuppoſer, ou, ce qui revient au même, jamais dans une telle courbe, on ne pourra déterminer une ordonnée *ED*, qui donne le point *D*, de la courbe, où ſa partie concave *DGH* ſeroit égale à ſa partie convexe *ADB*; égalité qui eſt une ſuite néceſſaire de la détermination de l'ordonnée *ED*, qui feroit trouver un rectangle *ABFG*, égal à l'eſpace courbe *ADHF*, puiſque de-là réſulte l'égalité de *DGH*, avec *ABD*.

Nommant

Nommant x, les abſciſſes *AE*, *AF*.... &c. d'une courbe quelconque; y, les ordonnées correſpondantes *ED*, *FH*... &c. Il ſuit de ce qui vient d'être dit, qu'un eſpace courbe *ADHF*, pourra toujours être exprimé par le produit d'une abſciſſe *AF* (x), par une ordonnée *ED* (y); c'eſt-à-dire, par xy. Différentiant ce rectangle, l'on aura : $xdy + ydx$. Mais dans le cas où l'ordonnée *ED*, devient conſtante, comme elle l'eſt dans le rectangle *ABFG*, ſuppoſé égal à l'eſpace courbe *ADHF*, ſa différentielle dy, devient zéro. Donc alors la différentielle $xdy + ydx$, eſt réduite à ydx, dont l'intégrale ſera : $S.ydx$. Mais, y, étant conſtante dans le rectangle, $S.ydx = xy$, & étant variable dans la courbe, l'on voit que le problême des quadratures s'y réduit à intégrer, ydx, en telle ſorte que l'intégrale ſoit la même, ſoit que, y, ſoit une quantité conſtante, ou une quantité variable; & que par conſéquent toute courbe quarrable eſt celle qui contient une ordonnée *ED*, propre à parcourir le même eſpace le long de l'axe *AF*, tant dans le cas où elle ſera conſidérée comme conſtante, que dans celui où elle ſeroit ſuppoſée variable; & les courbes non quarrables

ſeront celles qui ne contiendront point une telle ordonnée.

Si l'on nomme P, l'élément $ED = KM = PQ$, qui donne la quadrature de la courbe quelconque ADH; x, & y, les coordonnées de cette même courbe; l'on aura $MN = Y - P$, & $OQ = P - Y$, pour élémens des parties GHD, DBA, de cette courbe. Donc $S.ydx - S.pdx = S.pdx - S.ydx$; donc : $S.2ydx = S.2pdx = 2px$. Donc : $S.ydx = px$. Donc : $\frac{1}{x} \times S.ydx = P$. Ainſi l'expreſſion de l'ordonnée ED, qui, étant déterminée, feroit trouver la quadrature de la courbe quelconque ADH, ſera : $P = \frac{1}{x} \times S.ydx$.

Dans le cas où cette courbe ſeroit, par exemple, la parabole quarrée dont le paramètre ſeroit a, l'on auroit $P = \frac{1}{x} \times S.ydx = \frac{1}{x} \times S.a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{x} \times \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} y$; c'eſt-à-dire, que, dans ce cas, l'ordonnée $ED = P$, eſt toujours les deux tiers de l'ordonnée $FH = y$, conſidérée comme baſe, ou plus grande ordonnée de l'arc ADH, de la courbe... &c.

Observations sur les points de différens ordres, par lesquels les lignes courbes peuvent être conçues formées, & sur la maniere de les exprimer.

SI l'on a une grandeur constante a, élevée à une puissance quelconque m; cette grandeur étant a^m, son élément sera toujours a^{m-1}, quel que puisse être supposé l'exposant m, de cette grandeur, un nombre entier, ou rompu, positif, ou négatif. Ce qui est évident, puisque l'élément de toute grandeur est toujours cette grandeur même, dont l'exposant seroit diminué d'une unité. Ainsi la grandeur étant a^m, son élément, dans tous les cas, sera a^{m-1}.

Si $m=4$, la grandeur sera a^4, & son élément $a^{4-1}=a^3$.

Si $m=3$, la grandeur sera a^3, & son élément $a^{3-1}=a^2$.

Si $m=2$, la grandeur sera a^2, & son élément $a^{2-1}=a^1$.... &c.

Ainsi le cube sera l'élément de la quatrième puissance; le quarré, l'élément du cube; la ligne, l'élément du quarré.

Donc l'élément de la ligne a^1, ſera le point ou $a^{1-1} = a^0 = \frac{a}{a} = 1$; par conſéquent, l'expreſſion du point, élément de la ligne a ſera a^0 ; car faiſant $m = 1$, la grandeur ſera $a^m = a^1$, & l'élément $a^{1-1} = a^0$.

Mais la grandeur devant être conſidérée dans tous les divers états d'accroiſſemens, ou de décroiſſemens, dont elle peut être ſuſceptible, il s'enſuit que m, pourra exprimer tous les nombres poſſibles, poſitifs, ou négatifs, entiers, ou rompus. Si donc $m = 0$ la grandeur a^m ſera a^0, & l'élément $a^{0-1} = a^{-1}$. Mais ſi a^0 eſt le point du premier ordre, élément de la ligne a, il eſt clair que a^{-1} ſera le point du ſecond ordre, ou l'élément du point du premier ordre a^0, puiſqu'alors $m = -1$, & que la grandeur eſt $a^m = a^{-1}$, & par conſéquent, ſon élément $a^{m-1} = a^{-1-1} = a^{-2}$. . . &c, & comme il en ſeroit toujours de même à l'infini, qu'en ſuppoſant $m = a, -1, -2, -3, -4$, l'élément de la grandeur ſeroit toujours a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}. . . . &c, & enfin $a^{-\infty}$; il s'enſuit qu'il faudra concevoir des points de différens ordres à l'infini, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. . . $a^{-\infty}$, tous élémens, ou principes générateurs les uns des autres.

Delà il ſuit que le point de l'ordre infini $a^{-\infty}$, n'a point d'élément ou de principe générateur, puiſque ſon élément ſeroit $a^{-\infty-1} = a^{-\infty}$; le propre de l'ordre infini ſera donc d'exiſter par lui-même, & d'être ſans principe.

Si m eſt ſuppoſé égal à un nombre rompu, par exemple, à $\frac{3}{5}$, ſon élément ſera $a^{\frac{3}{5}-1} = a^{-\frac{2}{5}}$; ſi $m = \frac{5}{3}$, la grandeur étant $a^{\frac{5}{3}}$, ſon élément ſera : $a^{\frac{5}{3}-1} = a^{\frac{2}{3}}$; ſi $m = \frac{5}{2}$, l'élément de la grandeur $a^{\frac{5}{2}}$, ſera $a^{\frac{5}{2}-1} = a^{\frac{3}{2}}$; ſi $m = \frac{7}{2}$, la grandeur étant $a^{\frac{7}{2}}$, ſon élément ſera $a^{\frac{7}{2}-1} = a^{\frac{5}{2}}$.... &c.

Par la raiſon contraire l'élément d'une grandeur conſtante étant en général a^n, la grandeur ſera a^{n+1}, quel que puiſſe être le nombre n, un nombre entier, ou rompu, poſitif, ou négatif.

Si donc $n = 1, 2, 3, 4$... &c. l'élément étant a^1, a^2, a^3, a^4... &c, la grandeur ſera $a^{1+1}, a^{2+1}, a^{3+1}, a^{4+1}$... &c.

Si $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$... &c. l'élément de la grandeur étant $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{3}{5}}$... &c. la grandeur ſera : $a^{\frac{1}{2}+1} = a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}+1} = a^{\frac{4}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}+1} = a^{\frac{5}{4}}$, $a^{\frac{3}{5}+1} = a^{\frac{8}{5}}$... &c.

Ces principes reviennent donc encore à ceux du calcul différentiel, & intégral, à l'exception seulement qu'ils ne s'appliquent ici qu'aux grandeurs constantes ; c'est-à-dire, qu'aux grandeurs dont les élémens ne croissent, ni ne décroissent, & qui sont toujours les mêmes ; ce qui fait que l'élément ne doit pas être multiplié par l'exposant de la grandeur, comme dans le calcul différentiel, ni la grandeur être divisée par son exposant, comme dans le calcul intégral. Ainsi a^n, étant supposé l'élément d'une grandeur constante, la grandeur sera a^{n+1} ; mais si on suppose que a^n, soit l'élément d'une grandeur variable, la grandeur est alors $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

De même a^n étant supposée une grandeur constante, son élément sera a^{n-1} ; mais si c'est une grandeur variable son élément sera $n \cdot a^{n-1}$.

D'où l'on voit que quand la grandeur est variable, elle décroît par delà ce qu'elle auroit fait si elle avoit été constante, en raison de l'exposant auquel elle s'éleve, & qu'au contraire son élément croît, par delà ce qu'il auroit fait s'il avoit été constant, en raison de ce même exposant

de la grandeur, conformément à l'esprit de notre théorême fondamental.

Nous remarquerons ici un avantage de la grandeur constante sur la grandeur variable, quand l'exposant de la grandeur est supposé égal à zéro ; la grandeur étant alors a^0, son élément est a^{-1}. Ainsi a^{-1}, est le principe générateur, ou l'élément de la grandeur constante a^0. Mais si la grandeur est supposée variable, elle cesse alors d'avoir d'élément, ou de principe générateur. Et en effet la différentielle de x^0, est $0 \times x^{-1} dx = 0$. Mais dès que la grandeur x^0, n'a point d'élément, ou de différentielle, la différentielle $x^{-1}dx$, n'aura point d'intégrale, puisque son intégrale seroit : $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$.

Et ce qui fait que x^0, n'a point de différentielle, c'est qu'en effet x^0, étant égal à l'unité, est une quantité constante, dont la différentielle est zéro. Ainsi x^0, n'aura d'élément, ou de principe générateur, qu'autant qu'il seroit considéré comme une quantité constante ; par conséquent la quantité constante a ici un avantage sur la quantité variable, puisqu'étant supposée a^0, son élément sera a^{-1}, tandis que la variable x^0, n'auroit plus

d'élément ou de principe générateur.

Si nous appliquons actuellement aux lignes courbes, l'idée des différens ordres de points, dont il vient d'être parlé, il sera facile de concevoir en quoi consiste précisément l'état de rectification de ces lignes, & leur etat d'irrectification.

On démontre que toute tangente *BD*, à une courbe quelconque *NAM*, ne touche cette courbe qu'en un seul point; mais si l'on nomme *a*, la tangente *AD* (*Fig.* 40), les différens ordres de points de cette droite seront a^0, a^{-1}, a^{-2}.... $a^{-\infty}$. Observons que la courbe & la tangente ne peuvent avoir de commun que le point *AC*, par lequel la tangente touche la courbe, & que par conséquent, ce point seul pourra être leur mesure commune. Observons encore que dans l'hypothèse des courbes poligones d'une infinité de côtés, le point, & le petit côté *AC*, de la courbe, ne peuvent être qu'une même chose; puisqu'alors *AC*, seroit tout à la fois le petit côté *AC*, & le point par lequel la tangente *AD*, toucheroit la courbe *NAM*. Ainsi la mesure commune à ces deux lignes sera nécessairement un point ou petit côté *AC*, de quelqu'ordre fini a^0, a^{-1}, a^{-2} . . &c, ou de l'ordre infini $a^{-\infty}$.

Si ce point, que je nommerai a^{-n}, eſt renfermé un nombre infini p, de fois dans l'arc AM, de la courbe, & un nombre infini q, de fois dans la tangente AD, les deux lignes ſeront entr'elles comme ∞p, à ∞q; c'eſt-à-dire, comme $\frac{\infty p}{\infty q} = \frac{p}{q}$. Ainſi, dans ce cas, les deux lignes ſeront en rapport fini, & par conſéquent, la courbe ſera rectifiable.

Il eſt évident que ce cas doit avoir lieu toutes les fois que le point, ou petit côté AC de la courbe, ſera de quelqu'ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}... &c. Suppoſons que ce petit côté, ou point ſoit de l'ordre, par exemple, a^{-3}, le multipliant quatre fois par la conſtante a, l'on auroit $a^{-3+4} = a^{1}$, qui exprimeroit tout à la fois une droite AD, & un arc AM, de la courbe. Ainſi, dans ce cas, le point de l'ordre fini a^{-3}, ſeroit ſuſceptible d'être élevé à l'ordre de la ligne a^{1}, & par conſéquent la courbe ſeroit ſuſceptible d'être rectifiée.

Mais ſi le point AC, eſt de l'ordre infini $a^{-\infty}$, il eſt évident qu'alors la courbe ne pourra être rectifiée, à cauſe que pour élever le point $a^{-\infty}$, de l'ordre infini, à l'ordre de la ligne a^{1}, il faudroit le multiplier une infinité de fois, plus un, par la

conſtante a, ce qui donneroit $a^{-\infty+\infty+1}=a^{1}$; & attendu qu'il eſt impoſſible d'élever une quantité, a, à un degré infini, & même ici au degré plus qu'infini $\infty+1$, il s'enſuit que toute courbe qui n'aura de commun avec ſa tangente qu'un point, ou petit côté *AC*, de l'ordre infini $a^{-\infty}$, ne pourra jamais être rectifiée.

Les courbes rectifiables ſeront donc celles qui ſeroient vraiment poligones d'une infinité de côtés, infiniment petits, qui ſeroient touchées, par une tangente *AD*, dans quelque point ou petit côté *A C*, de quelqu'ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}.... &c, ce petit côté étant viſiblement la meſure commune à la courbe, & à la tangente.

Et les courbes irrectifiables, celles qui ne ſeroient point en rigueur des poligones, qui n'étant touchées par une tangente *AD*, que dans un point, ou petit côté *A C*, d'un ordre infini $a^{-\infty}$, n'auroient qu'un tel point pour meſure commune avec la tangente *A D*.

Il ſuit de ces principes qu'on ne peut concevoir comment une courbe peut devenir effectivement poligone, qu'autant que la courbure de ſes arcs ſeroit toujours moindre à proportion qu'ils ſeroient ſuppoſés plus petits; c'eſt-à-dire, qu'autant

que la courbure de ſes arcs ſeroit épuiſable à l'infini, puiſqu'en effet, tous ſes arcs doivent finir par devenir rectilignes, étant diviſés, & ſubdiviſés à l'infini, dès qu'on la ſuppoſe poligone.

La propriété ſpéciale des courbes rectifiables ſera donc d'avoir des arcs dont le degré de courbure diminueroit toujours à proportion qu'ils ſeroient diviſés dans un plus grand nombre de parties ; enſorte que la courbure doit diſparoître, & par conſéquent, les arcs finiront par devenir rectilignes, quand ils ſeroient infiniment petits.

Et par la raiſon contraire, les courbes non rectifiables ſeront celles dont la courbure ſeroit inépuiſable à l'infini, & dont le degré de courbure ſeroit ou conſtant, ou non ſuſceptible de diminuer à l'infini, à meſure que ces arcs ſeroient diviſés en un plus grand nombre de parties. Ces courbes ne ſeront donc point en rigueur des poligones, puiſque leur degré de courbure étant ou conſtant, ou non ſuſceptible de diminuer à l'infini, un très-petit arc de ces courbes ſeroit encore courbe, & non transformé en ligne droite. L'élément réel de ces courbes ſera donc en rigueur, non une ligne droite *A C*, ou point de

quelqu'ordre fini a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c, mais un petit arc.

Si nous appliquons actuellement cette théorie, par exemple, au cercle, & à l'ellipſe, il ne ſera pas difficile d'en conclure leur état d'irrectification.

En effet que ces deux courbes ſoient ſuppoſées décrites par le moyen d'un fil tendu *CD*, *AfF*, mû circulairement autour du ſeul centre *C*, dans le cas de la génération du cercle (*Fig.*41), & autour des deux centres *f*, *F* (*Fig.* 42), dans le cas de la genération de l'ellipſe. Il eſt manifeſte qu'on ne peut concevoir, qu'un ſtyle, placé en *D*, & en *A*, & tenant toujours tendus les fils attachés fixement en *C*, & en *f*, *F*, puiſſe dans ſon mouvement jamais ſuivre, même pendant le plus petit inſtant poſſible, la direction des tangentes *DN*, *AO*; & delà il ſuit que les points *D*, *A*, communs aux courbes, & aux tangentes *DN*, *AO*, ne pourront être des points, ou petits côtés rectilignes, d'aucun ordre fini, a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c, mais ſeulement des points de l'ordre infini $a^{-\infty}$, & que par conſéquent ces deux courbes ſeront irrectifiables.

Il n'eſt pas moins manifeſte que l'élément réel de ces courbes n'eſt, ni ne peut

être qu'un petit arc *DO*, ou *AB*, décrit dans un petit tems $\dot{t}$, & non point une petite droite d'aucun ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}... &c. qu'il est impossible que le style eût pu décrire pendant ce même tems $\dot{t}$, infiniment court. Donc la courbure de ces deux courbes est inépuisable à l'infini, dans tout leur circuit. Cette courbure est constante dans le cercle, & variable dans l'ellipse. Un petit arc, pris dans un même cercle, est aussi courbe qu'un grand arc. On n'a donc en rigueur pas plus de droit de supposer la rectification d'un petit arc que celle d'un grand arc, soit dans le cercle, soit dans l'ellipse.

Quand il arrive donc que le calcul intégral n'assigne la rectification du cercle, de l'ellipse, & d'une infinité d'autres courbes que dans l'infini, c'est parce que dans ce calcul on part de l'hypothèse que toutes les courbes sont poligones, ce qui n'est rigoureusement vrai que de quelques unes. Or, dans les courbes qui ne sont point en rigueur poligones, qui n'ont de commun avec leurs tangentes que des points, ou petits côtés de l'ordre infini $a^{-\infty}$, il est évident que le calcul se conforme alors à la nature de ces courbes,

en n'aſſignant leur rectification que dans l'infini, c'eſt-à-dire, qu'au point de l'ordre infini $a^{-\infty}$.

Et au contraire quand ce calcul détermine une ligne droite égale à une ligne courbe, ou, ce qui revient au même, quand il aſſigne la rectification de certaines courbes dans le fini, il ſe conforme encore à la nature de ces ſortes de courbes qui étant véritablement poligones, ont un point, ou petit côté de quelqu'ordre fini a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c. commun avec leurs tangentes; enſorte que ce point, ou petit côté quelconque a^{-n}, étant contenu, par exemple, un nombre p, infini de fois dans un arc fini de ces mêmes courbes, & un nombre q, infini de fois dans leur tangente, le rapport de cet arc quelconque avec la tangente ſera : $\frac{\infty p}{\infty q} = \frac{p}{q}$, c'eſt-à-dire, que le rapport deviendra fini.

Si l'on a une courbe quelconque ABQ, ſon axe AP (*Fig.* 43), ſur lequel on prendra les coupées AC, AD, que l'on nommera x; & y, les ordonnées CB; ſuppoſant l'ordonnée DN, infiniment près de l'ordonnée CB, & abaiſſant la perpendiculaire BO, l'on aura toujours un petit triangle rectangle BON, dont le point, ou

petit côté BN, de la courbe, ſera l'hypothénuſe. Mais puiſque $AC = x$, donc $CD = dx$; & puiſque $CB = DO = y$, l'on aura $ON = dy$. Donc l'expreſſion du point, ou petit côté BN, d'une courbe quelconque, conſidérée comme poligone, ſera toujours $BN = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; c'eſt là l'expreſſion ou formule générale de la rectification des courbes que fournit le calcul différentiel.

Suppoſons actuellement un arc quelconque fini AB, de cette courbe; BN ſera ſon point générateur, ou petit côté rectiligne, commun à la courbe, & à la tangente NM, que je nommerai a. Or le point, ou principe générateur de la ligne a, étant a^0, ſuivant ce qui a été dit, l'on aura : $a^0 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Donc $\infty\, a^0 = \infty \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Mais $\infty\, a^0 = a^1$; donc $a^1 = \infty \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Or dans toutes les courbes vraiment poligones l'équation $a^1 = \infty \sqrt{dx^2 + dy^2}$, eſt juſte, puiſque BN, eſt néceſſairement un élément commun à la courbe, & à la tangente NM, & dès-là cette courbe eſt rectifiable, & en différentiant ſon équation, & faiſant les ſubſtitutions convenables, dans la formule

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$; cette formule doit toujours finir par se réduire à une expression intégrable en termes finis, puisqu'en effet $S. \sqrt{dx^2 = dy^2} = a$.

Mais dans le cas où la courbe ne seroit point en rigueur poligone, alors BN, ne seroit point un élément commun à la courbe, & à la tangente NM; cet élément commun seroit le point de l'ordre infini $a^{-\infty}$; l'on n'auroit donc plus l'égalité $a^0 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ni par conséquent cette autre égalité $a^1 = \infty \sqrt{dx^2 + dy^2} = S. \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & dès-là la courbe ne seroit plus rectifiable en termes finis, puisqu'il ne pourroit exister aucune droite a^1 égale à $S. \sqrt{dx^2 + dy^2}$; la rectification de la courbe, dans ce cas, ne pourroit s'obtenir que par la voie d'une suite infinie, à cause précisément qu'elle ne seroit exacte qu'au point de l'ordre infini $a^{-\infty}$; car ce n'est qu'à ce point seul que l'on pourroit avoir l'égalité $a^{-\infty} = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{ON}^2}$; mais cette égalité exigeroit de différentier une infinité de fois les variables x, & y, afin d'avoir les différentielles BO, ON, du même ordre précisément que le point de l'ordre infini $a^{-\infty}$, élément commun à

la

la courbe & à la droite, ou tangente *NM*. Ainsi visiblement de telles courbes seront toujours irrectifiables en termes finis. Quand il arrive donc que la quadrature, ou la rectification d'une courbe ne sont assignées que dans l'infini, c'est la preuve certaine que l'élément commun à un espace courbe, & à un espace rectiligne, ou à la ligne courbe, & à une ligne droite quelconque, ne peut se trouver qu'après avoir différencié une infinité de fois les variables x, & y; c'est-à-dire, les coordonnées de la courbe; & dès-là l'on voit avec la dernière évidence que de telles courbes ne peuvent être ni quarrées, ni rectifiées en termes finis, puisque leur quadrature, & leur rectification exactes ne pourroient s'obtenir qu'après avoir différencié une infinité de fois les variables x, & y, de ces courbes; car la seconde différentiation donneroit une quadrature, & une rectification plus rapprochées de la vérité que la première, la troisieme plus que la seconde, la quatrieme plus que la troisieme, & ainsi de suite. Donc, à la fin d'une infinité de différentiations des variables x, & y, on auroit approché à l'infini de la vraie quadrature, & rectification de la courbe; & par conséquent,

ce n'eſt qu'à ce point ſeul que cette quadrature, & cette rectification exactes ſeroient obtenues, puiſqu'il n'exiſteroit qu'à ce point ſeul un élément commun à la quantité rectiligne, & curviligne. Donc, dans ce cas, la quadrature & la rectification de la courbe en termes finis ſera impoſſible, puiſque ce cas ſuppoſe que l'on auroit fait une choſe impoſſible; ſavoir, d'avoir différentié une infinité de fois les variables x, & y.

Et en effet, en différentiant une infinité de fois les variables x, & y, on auroit pour expreſſion $d^{\infty} x$, $d^{\infty} y$, qui reviendroit aux expreſſions des points, ou à peu près, $x^{-\infty}$, $y^{-\infty}$. Ainſi les petites lignes Bo, oN, différentiées une infinité de fois, ou diviſées une infinité de fois par l'infini donneroient $d^{\infty} x$, $d^{\infty} y$, ou à peu près, $x^{-\infty}$, $y^{-\infty}$. Dans les courbes non ſuſceptibles de rectification, l'élément commun à la courbe AN, & à la tangente NM, ſera donc: $a^{-\infty} = \sqrt{x^{-2\infty} + y^{-2\infty}}$ qui démontre par le fait, que la rectification, dans ce cas, s'éleve à un ordre infini de grandeur, & qu'il eſt par conſéquent impoſſible de l'obtenir.

Soit, en effet, l'équation $y^2 = a x$, à

la parabole, on en déduira l'égalité $x = \frac{y^2}{a}$. Donc $x^\infty = \frac{y^{2\infty}}{a^\infty}$. Donc encore $x^{2\infty} = \frac{y^{4\infty}}{a^{2\infty}}$. Donc $\frac{1}{x^{2\infty}} = \frac{1}{\frac{y^{4\infty}}{a^{2\infty}}} = \frac{a^{2\infty}}{y^{4\infty}}$. Donc encore $x^{-2\infty} = a^{2\infty} y^{-4\infty}$. Subſtituant, dans la formule ci-deſſus, à la place de $x^{-2\infty}$, ſa valeur $a^{2\infty} y^{-4\infty}$, l'on aura $\sqrt{a^{2\infty} y^{-4\infty} + y^{-2\infty}}$ pour expreſſion du point ou petit côté *BN*, de la parabole, commun à cette courbe, & à la tangente *NM*; ce qui démontre que quand la courbe n'a de commun avec ſa tangente qu'un point de l'ordre infini, elle eſt néceſſairement irrectifiable, puiſqu'il entre dans l'expreſſion de ce point, ou petit côté, des grandeurs élevées, ou abaiſſées à un ordre infini, comme il réſulte, en effet, d'une foule de ſuites que les Géomètres ont trouvées pour quarrer ou rectifier le cercle, l'ellipſe, l'hyperbole, & une infinité d'autres courbes, par leſquelles on voit évidemment que les grandeurs qui compoſent les termes de ces ſuites s'élevent, ou s'abaiſſent à des degrés ſucceſſivement plus grands, ou moindres à l'infini, parce que, dans ces différens cas, la quantité rectiligne, & la quantité cur-

viligne n'ont de commun qu'un élément d'un ordre infini.

Dès qu'une ligne courbe *ABN*, & une droite quelconque *NM*, n'auront d'autre mesure commune qu'un point de l'ordre infini $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}}$, il est manifeste que le rapport entre ces deux lignes ne pourroit qu'être infini, & ne s'exprimer par conséquent que par une infinité de termes; car le nombre des termes qui exprimeroient le rapport de deux quantités doit toujours croître à proportion que la mesure de ce rapport seroit plus petite. Or la mesure du rapport étant ici la quantité $\frac{1}{a^{\infty}}$, abaissée à un ordre infini, il est évident que ce rapport ne pourroit s'exprimer que par une infinité de termes; puisqu'il faudroit diviser l'unité par la quantité *a*, élevée à un exposant infini, & que par conséquent ce rapport seroit infini.

On voit clairement que si la mesure du rapport étoit un point, ou petit côté de quelqu'ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}... &c. ce rapport seroit fini, puisqu'il ne faudroit pas une infinité de termes pour l'exprimer; l'exposant de cette mesure étant

toujours un nombre fini : mais quand l'exposant de la mesure commune représenteroit un nombre infini, dès-lors le rapport entre la courbe, & la ligne droite ne peut qu'être infini, & par conséquent ne pourroit s'exprimer que par une infinité de termes, c'est-à-dire, par une suite infinie.

Ainsi toute la théorie de la quadrature, & de la rectification des courbes se réduit actuellement à deux mots. Une mesure commune à la quantité curviligne, & à la quantité rectiligne sera nécessairement employée pour mesurer leur rapport, & cette mesure aura en même tems un exposant. Quand cet exposant sera fini, la courbe sera susceptible de quadrature, ou de rectification en termes finis; & quand l'exposant de cette mesure sera infini, la courbe ne sera susceptible de quadrature ou de rectification que par une suite infinie; car il est évident que le rapport entre la quantité curviligne, & la quantité rectiligne doit être précisément de même nature que la mesure qui seroit employée pour le déterminer. Ce rapport sera donc fini quand la mesure sera finie, & infini quand elle sera infinie.

Tel est le résultat du Mémoire lû par

l'Auteur à l'Académie des Sciences, ſur les points de différens ordres dont les lignes courbes peuvent être conçues formées. Ce Mémoire fait donc partie de ceux qui, ſuivant M. Bézout, n'*ont pu être approuvés* par l'Académie. On deſireroit que cet Académicien voulût bien nous faire part des raiſons qui auroient porté cette Compagnie à ne point approuver des choſes ſur leſquelles ſon jugement n'a pas même été requis. Sans doute que M. Bézout aura quelque choſe de mieux à produire ſur l'état de courbure, & qu'il rendra plus ſenſible qu'on ne vient de faire, la différence qu'il doit néceſſairement y avoir dans la nature de la courbure de deux lignes courbes, dont l'une feroit rectifiable, & l'autre non rectifiable. Nous l'invitons à donner la ſolution de ce problême important, & en attendant que M. Bézout enrichiſſe la Géométrie de cette découverte intéreſſante, nous nous ſommes déterminés à publier la doctrine qui nous a paru devoir y conduire.

Nous croyons devoir ajouter ici une obſervation qui peut avoir ſon utilité; ſavoir, que ſi l'on nomme a, le diamètre d'un cercle, l'équation $y^2 = ax - x^2$, qui

eſt l'équation ordinaire à cette courbe, n'eſt pas l'équation la plus générale qui puiſſe lui convenir, ni qui exprime par conſéquent le plus grand nombre de cas, ou de rapports entre les coordonnées de la courbe déterminée, relativement à un arc quelconque, dont la corde ſeroit ſuppoſée a; car il eſt évident que l'équation $y^2 = ax - x^2$, n'exprime qu'un cas particulier; ſavoir, le cas où la corde a, devient le diamètre même du cercle, & que par conſéquent cette équation devient en quelque ſorte oiſive, lorſqu'il s'agiroit de l'équation à un arc moindre que la demi-circonférence, & dont la corde ſeroit par conſéquent moindre que le diamètre.

Soit ACB, un arc quelconque de cercle, AB (a) ſa corde, ſur laquelle prenant les coupées AO (x), & les ordonnées OC (y), nommant la variable OM (z) (*Fig.* 44), l'équation à l'arc quelconque ACB, ſera, par la propriété du cercle : $AO \times OB = CO \times OM$; c'eſt-à-dire, $ax - x^2 = yz$. Telle doit être l'équation générale à tous les arcs de cercle. L'on voit que quand la corde AB, eſt égale au diamètre, alors $CO = OM$, & par conſéquent l'équation, dans ce cas particulier, devient $y^2 = ax - x^2$.

L'équation générale au cercle étant donc, $yz = ax - x^2$, tandis que l'équation à la parabole renverſée eſt, $ay = ax - x^2$, il s'enſuit que l'équation au cercle contient une variable de plus que l'équation à la parabole, & que par conſéquent, le cercle eſt une courbe moins ſimple que la parabole. L'élément du cercle eſt donc $y = \frac{ax - x^2}{z}$, & l'élément de la parabole $y = \frac{ax - x^2}{a}$. D'où il ſuit que la détermination de l'élément de la parabole, ne dépend que de la détermination de la ſeule variable x, tandis que la détermination de l'élément du cercle, conſidéré relativement à un arc quelconque, dépend de la détermination des deux variables x, & z. D'où il réſulte encore que la parabole pourra être quarrée, & que le cercle ne pourra point l'être. Et en effet, l'élément de la parabole étant $y = \frac{ax - x^2}{a}$ $= x - \frac{x^2}{a}$, la quadrature de cette courbe ſera : $S.y\,dx = S.x\,dx - S.\frac{x^2dx}{a} = \frac{x^2}{2}$ $- \frac{x^3}{3a}$; mais l'élément du cercle étant $y =$ $\frac{ax - x^2}{z}$; d'où, en multipliant par la différentielle dx, ſuit l'égalité : $y\,dx =$

$\frac{axdx - x^2dx}{z}$, l'on voit clairement que ce qui empêche d'intégrer l'expression $\frac{axdx - x^2dx}{z}$, & par conséquent de quarrer indéfiniment un segment *ACBA* quelconque de cercle, c'est la variable z, qui divise ici la différentielle $axdx - x^2dx$, puisque cette expression s'intégre lorsque cette variable devient constante, comme dans la parabole, & en conséquence que c'est originairement la variable qui entre de plus dans l'équation au cercle, que dans l'équation à la parabole, qui fait que cette premiere courbe ne peut être quarrée en termes finis, comme la seconde; mais on peut employer à cette quadrature une méthode d'approximation. L'équation à tous les segmens quelconques de cercle étant $y = \frac{ax - x^2}{z}$, multipliant par la différentielle dx, l'on aura : $ydx = \frac{axdx - x^2dx}{z}$, supposant z, constante, & faisant $x = a$, l'expression de tous les segmens de cercle seroit $S.ydx = \frac{\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{z} = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}}{z} = \frac{a^3}{6z}$; c'est-à-dire, que tous les segmens de cercle seroient égaux à la sixieme partie du cube de leur corde,

divisée par une variable, ou indéterminée z, qu'on peut supposer plus grande, ou plus petite. Que le segment du cercle soit supposé, par exemple, le segment *ACBA*, du quarré inscrit, dans le cas ou z, n'auroit point varié, il est clair qu'alors $z = a$, ou côté du quarré inscrit. Donc le segment *ACBA*, seroit $\frac{a^3}{6z} = \frac{a^2}{6}$; c'est-à-dire, qu'alors ce segment seroit égal à la sixieme partie du quarré de sa corde. Déterminant le rapport du diamètre à la circonférence par cette supposition, on trouveroit une circonférence trop grande par rapport au diamètre. Mais si l'on déterminoit z, au point *DN*, de sa plus grande variation, ou de son plus grand accroissement, alors la circonférence qui résulteroit de cette supposition, seroit trop petite à l'égard du diamètre. Donc le point *E*, & le point *N*, pourront être considérés comme deux premieres limites, l'une par excès, l'autre par défaut, entre lesquelles on pourroit déterminer une ligne, par exemple, $OM = z$, qui divisant le cube de la corde *AB*, donnât une surface à très-peu près égale au segment *ACBA*, & par conséquent le rapport très-approché du diamètre à la circonférence.

Observation sur la maniere de déduire les propriétés des Sections coniques.

On peut définir une section conique, considérée relativement à sa directrice & à son foyer, une courbe qui est le lieu du rapport constant de la distance où chaque point de la courbe se trouve de la directrice & du foyer, exprimé par des lignes plus longues ou plus courtes, suivant que le point de la courbe seroit plus ou moins éloigné du foyer; ensorte que nommant *m*, la distance du sommet de la courbe à la directrice; *n*, la distance du même point au foyer; *D*, la distance d'un point quelconque de la courbe à la directrice; *d*, la distance de ce même point au foyer, l'on aura toujours cette analogie: $m : n :: D : d$, dont résultera, pour premiere équation, commune aux trois sections coniques, $md = nD$. D'où l'on tirera ces égalités, $d = \frac{n}{m} D$. $D = \frac{m}{n} d$, qui doivent être le principe de toutes les propriétés dont ces courbes seront susceptibles.

Dans le cas d'une ordonnée qui pas-

feroit par le foyer de ces courbes, il eſt évident que la diſtance D, de l'extrémité de cette ordonnée à la directrice, ſera $m+n$, donc, dans ce cas, $D=m+n$: ſubſtituant cette valeur de D, dans la formule ci-deſſus $d=\frac{n}{m}D$; l'on aura : $d=\frac{n}{m}\times\overline{m+n}=\frac{mn+n^2}{m}$, pour expreſſion de l'ordonnée qui paſſeroit par le foyer des ſections coniques. Cette double ordonnée, ou $\frac{2mn+2n^2}{m}$, eſt ce qu'on appelle le *paramètre* de la ſection. Ainſi le paramètre, dans toute ſection conique, ſera $\frac{2mn+2n^2}{m}$.

Mais un point quelconque de ces courbes étant un lieu du rapport $\frac{m}{n}$, il ne pourra arriver que trois cas, & c'eſt le nombre de ces cas qui détermine néceſſairement celui de toutes les courbes poſſibles qui feroient le lieu du rapport $\frac{m}{n}$; car ou $m=n$, ou $m>n$, ou $m<n$: voilà tous les cas poſſibles qui pourront arriver. Il ne pourra donc y avoir que trois courbes qui feroient le lieu du rapport $\frac{m}{n}$, & ce ſont préciſément ces mêmes courbes que les Géomètres nomment *Sections coniques*,

parce que c'est dans le cône qu'elles ont d'abord été considérées.

Dans le cas où $m = n$, le paramètre devient $\frac{2m^2 + 2m^2}{m} = 4m$; c'est-à-dire, que dans ce cas, le paramètre est égal à quatre fois la distance m, ou n, du sommet de la courbe à la directrice, ou au foyer, & alors la courbe est appellée *parabole*.

Dans le cas où, $m > n$, la courbe est une ellipse.

Dans le cas où, $m < n$, la courbe est une hyperbole.

Si l'on nomme, à l'ordinaire, l'abscisse x, l'ordonnée y, relativement à un point quelconque de la section, la distance du foyer au point de l'axe où aboutira l'ordonnée sera; savoir, $x - n$, au-dessous du foyer, & $n - x$, au-dessus, ce qui est évident. La distance de l'extrémité de l'ordonnée à la directrice sera $m + x$. Ainsi, à ce point de la courbe, $d = \frac{n}{m} D = \frac{n}{m} \times \overline{m + n} = \frac{mn + nx}{m}$, donc l'expression générale de la distance d, d'un point quelconque de la courbe au foyer, sera: $\frac{mn + nx}{m}$.

Mais cette distance, ou ligne $\frac{mn + nx}{m}$,

eſt toujours l'hypothènuſe, ou grand côté, d'un triangle rectangle, dont le ſecond côté ſeroit l'ordonnée y, & le troiſieme, $x-n$, ou $n-x$; c'eſt-à-dire, la ligne compriſe entre le foyer & le point où l'ordonnée couperoit l'axe; d'où réſultera cette égalité, $\left(\frac{mn+nx}{m}\right)^2 = y^2 \pm \overline{x \mp n}^2$; d'où on tirera l'équation, $y^2 = \overline{\frac{2mn+2n^2}{m}} \cdot x \pm \overline{\frac{m^2 \mp n^2}{m^2}} \cdot x^2$, pour ſeconde équation commune aux trois ſections coniques.

Dans le cas où, $m=n$, l'équation ſe réduiroit à $y^2 = \overline{\frac{2mn+2n^2}{m}} \cdot x$, & ſeroit à la parabole, & comme $\frac{2mn+2n^2}{m}$, eſt le paramètre qu'on peut appeller, p, l'équation ſeroit réduite à $y^2 = px \pm \overline{\frac{m^2 \mp n^2}{m^2}} \cdot x^2$, & pour la parabole à $y^2 = px$.

Dans le cas où, $m>n$, le dernier terme où ſe trouve x^2, ſeroit négatif, & la courbe ſeroit alors une ellipſe.

Dans le cas où, $m<n$, le dernier terme où ſe trouve x^2, ſera poſitif, & la courbe ſera une hyperbole.

Ainſi l'équation ci-deſſus, en même-tems qu'elle eſt immédiatement déduite de

la génération des trois sections coniques, & du rapport $\frac{m}{n}$, dont ces courbes sont le lieu, nous manifeste exactement leur nature; puisqu'elle nous fait voir, premiérement, que dans la parabole le quarré y^2 de l'ordonnée est égal au produit du paramètre, p, par l'abscisse x; secondement, que dans cette courbe la variable x, est moins élevée d'une unité dans son exposant que la variable, y; troisiémement, que l'équation à l'ellipse & à l'hyperbole est toujours un produit du paramètre p, qui n'est qu'une fonction des données m, n, par l'abscisse, x, moins ou plus le produit de la quantité constante, $\pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2}$, qui n'est de même qu'une fonction des mêmes données m, n, par le quarré x^2, de la même variable x.

Si nous cherchons à déterminer l'expression des axes, par les mêmes données m, n, il sera facile de se convaincre que ces axes ne sont & ne peuvent être aussi que quelques fonctions de ces mêmes données. En effet le premier demi-axe, ou axe principal, sera toujours, $\frac{mn}{\pm m \mp n}$, & le second demi-axe, $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$, qui sont

évidemment des fonctions des données m, n.

Si la courbe est une parabole, alors $m = n$. Donc le premier demi-axe devient : $\frac{mn}{o} = \frac{m^2}{o}$, & le second, $\sqrt{\frac{2m^3}{o}}$, c'est-à-dire, que ces deux demi-axes sont infinis, & même le premier $m . \frac{m}{o}$, est infiniment plus grand que le second, $\sqrt{\frac{2m^3}{o}} = m . \sqrt{\frac{2m}{o}}$; car $\frac{m}{\frac{o}{\infty}} = \frac{m}{1} = \infty m$. Donc $m . \frac{m}{o} = \infty m . m$, & $m \sqrt{\frac{2m}{o}} = m \sqrt{\infty 2m}$; mais $\frac{m}{o} = \infty m$, est le quarré de $\sqrt{\frac{m}{o}} = \sqrt{\infty m}$; & tout quarré a un rapport d'autant plus grand avec sa racine, que le nombre qui le formera sera supposé plus grand : si donc ce nombre est supposé infini, comme dans l'exemple présent, $\frac{m}{o} = \infty m$, son rapport avec sa racine, $\sqrt{\frac{m}{o}} = \sqrt{\infty m}$, sera infini, & par conséquent $\frac{m}{o} = \infty m$, sera infiniment plus grand que sa raci-

ne $\sqrt{\frac{m}{0}} = \sqrt{\infty\, m}$. Donc le premier demi-axe infini $\frac{m^2}{0}$ de la parabole, ſera infiniment grand à l'égard du ſecond demi-axe auſſi infini $\sqrt{\frac{2m^3}{0}}$.

Si la courbe eſt une ellipſe, alors, $m > n$. Donc, dans ce cas, les deux demi-axes ſont finis & poſitifs, & la courbe eſt néceſſairement fermée. Cette courbe ſe rapprochera toujours d'autant plus de la parabole que, n, ſeroit plus près de la valeur de m; puiſque, dans le cas où $n = m$, l'ellipſe ſe transforme en cette même courbe.

Dans le cas où $m < n$, les deux demi-axes $\frac{mn}{\pm m \mp n}$, $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$, ſont négatifs; dès-là leur direction eſt contraire au ſens des ordonnées, & ces axes ſortiront de la courbe; ce qui ſera le cas de l'hyperbole, qui ſeroit également transformée en parabole, comme l'ellipſe, en ſuppoſant $n = m$.

Ainſi il ſeroit facile de rapprocher à l'infini une ellipſe & une hyperbole de la valeur d'une parabole, en rapprochant, dans le premier cas, n, de la valeur de

m, & dans le ſecond, m, de la valeur de n.

Si l'on porte actuellement ſur la directrice les diſtances m, n, & que l'on mene les lignes relatives à la conſtruction de l'expreſſion $\frac{mn}{\pm m \mp n}$, on formera deux triangles rectangles & ſemblables, d'où on tirera ; ſavoir, pour l'ellipſe, l'analogie : $m - n : m :: n : \frac{mn}{m-n}$; ce dernier terme étant toujours l'expreſſion du côté moyen de l'un des deux triangles, & ce même côté eſt en même tems égal au demi-grand axe de l'ellipſe : ſi l'on nomme, a, ce demi-grand axe de l'ellipſe, l'on aura donc, $a = \frac{mn}{m-n}$; & faiſant les mêmes choſes pour l'hyperbole, l'on trouvera que l'expreſſion de ſon demi-grand axe ſera : $a = \frac{mn}{n-m}$.

Le demi-grand axe de l'ellipſe étant donc, $a = \frac{mn}{m-n}$, ſi l'on y ajoute, m, l'on aura, $\frac{mn}{m-n} + m = \frac{m^2}{m-n}$, pour expreſſion de la diſtance de la directrice au centre de l'ellipſe ; mais, dans la formule ci-deſſus, $d = \frac{nD}{m}$, ſi l'on ſubſtitue à D,

cette distance $\frac{m^2}{m-n}$, qui est précisément celle de la directrice à l'extrémité du petit axe, l'on aura, $d = \frac{nm^2}{m^2 - mn} = \frac{mn}{m-n}$, qui démontre que la distance, d, de l'extrémité du petit axe, au foyer de la courbe, est égale au demi-grand axe $\frac{mn}{m-n}$ de l'ellipse; ce qui est, en effet, l'une des principales propriétés de cette courbe.

Le demi-grand axe étant donc, $\frac{mn}{m-n}$, si l'on en retranche, n, l'on aura : $\frac{mn}{m-n} - n = \frac{n^2}{m-n}$, pour expression de la distance du foyer au centre de l'ellipse.

Nommons, b, le demi-petit axe, il sera le côté d'un triangle rectangle dont l'hypothènuse sera $d = \frac{mn}{m-n}$, & le troisième côté $\frac{n^2}{m-n}$. Donc : $d^2 = \left(\frac{mn}{m-n}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{n^2}{m-n}\right)^2$, ou $\frac{m^2n^2}{m^2 - 2mn + n^2} = b^2 + \frac{n^4}{m^2 - 2mn + n^2}$. Donc, $b^2 = \frac{m^2n^2 - n^4}{m^2 - 2mn + n^2}$. Donc, $b = \frac{n}{m-n} \sqrt{m^2 - n^2} = n\sqrt{\frac{m-n \,.\, m+n}{m-n \,.\, m-n}} = n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}} = \sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{m-n}}$. Ainsi le demi-

ſecond axe de l'ellipſe ſera : $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{m - n}}$. On trouveroit de même que le demi-ſecond axe de l'hyperbole ſeroit : $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{n - m}}$.

Par conſéquent l'expreſſion du demi-premier axe, dans les trois ſections coniques, ſera $\frac{mn}{\pm m \mp n} = a$, & l'expreſſion du demi-ſecond axe, $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}} = b$. Ces deux axes ſont infinis dans la parabole, finis & poſitifs dans l'ellipſe, finis & négatifs dans l'hyperbole.

L'expreſſion des axes étant déterminée, dans les trois ſections coniques, il s'enſuit que, dans ces mêmes courbes, le paramètre $P = \frac{2mn + 2n^2}{m}$, ſera toujours la troiſieme proportionnelle aux deux axes $2\frac{mn}{\pm m \mp n}$, $2\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$, de ces courbes ; puiſqu'en effet l'on aura : $\frac{2mn}{\pm m \mp n}$: $2\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}} :: 2\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}} : \frac{2mn + 2n^2}{m}$, ce qui comprend même le cas de la parabole, quoique les deux axes ſoient infinis ; car les termes de cette proportion

ſeroient, dans ce cas, $\div 2 \frac{m^2}{o} = \infty .2 m^2 :$ $\sqrt{\frac{8 m^3}{o}} = \sqrt{\infty .8 m^3} : 4 m$; c'eſt-à-dire, $\infty .2m^2 : \sqrt{\infty .8m^3} : : \sqrt{\infty .8 m^3} : 4 m.$

L'on voit auſſi que les deux axes $\infty .2m^2$, $\sqrt{\infty .8 m^3}$, de la parabole étant donnés, l'on peut toujours en déduire le paramètre $4m$; puiſque ce paramètre eſt égal au quarré du ſecond axe, diviſé par le premier, comme dans les autres ſections coniques, c'eſt-à-dire, à $\frac{\infty .8m^3}{\infty .2m^2} = 4m.$

On peut rapporter aux axes a, b, des ſections coniques, l'équation $y^2 = \frac{2mn + 2n^2}{m} . x \overline{\pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2}} . x^2$, commune à ces trois courbes, que l'on a vue ci-deſſus; car premiérement les conſtantes, $\frac{2mn + 2n^2}{m}$, étant égales au paramètre P, ou au quarré du ſecond axe diviſé par le premier, l'on aura: $\frac{2mn + 2n^2}{m} = P = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$: ſubſtituant, dans l'équation ci-deſſus, $\frac{2b^2}{a}$, à ſa valeur, $\frac{2mn + 2n^2}{m}$, l'équation ſera, $y^2 = \frac{2b^2}{a} x^2 \pm \overline{m^2 \mp n^2} . x^2$. Secondement, il eſt évident

que $\frac{\pm m^2 \mp n^2}{m^2} = \pm \frac{b^2}{a^2}$; car $\pm \frac{b^2}{a^2} =$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\frac{m n^2 + n^3}{\pm m \mp n}}{\frac{m^2 n^2}{m^2 - 2 m n + n^2}}\end{array}\right\} = \frac{\overline{mn^2 + n^3} . \overline{\pm m \mp n}}{m^2 n^2} = \pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2} :$$

ſubſtituant donc, dans la même équation, $\pm \frac{b^2}{a^2}$, à ſa valeur $\pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2}$, l'équation commune aux trois courbes, rapportée à leurs axes, ſera : $y^2 = \frac{2 b^2}{a} x \pm \frac{b^2}{a^2} x^2$.

Si l'on ſubſtitue, dans cette derniere équation, le paramètre P, à ſa valeur $\frac{2 b^2}{a}$, l'on aura l'équation $y^2 = p x \pm \frac{p x^2}{2 a}$, commune aux trois ſections, rapportée à leur paramètre P. L'on voit que, dans le cas de la parabole, l'axe $2 a$, étant infini, le terme, $\frac{p x^2}{2 a}$, eſt nul relativement au premier, & que l'équation ſe réduit alors à, $y^2 = p x$.

De l'équation ci-deſſus, $y^2 = \frac{2b}{a} x \pm \frac{b^2}{a^2} x^2$, ſuit cette analogie : $y^2 : (2 ax \pm x^2) :: b^2 : a^2$; c'eſt-à-dire, que dans toute ſection conique le quarré de l'ordonnée eſt au produit de ſes abſciſſes, comme le quarré du demi-ſecond axe, eſt au quarré du demi-premier axe ; & comme le rapport

de ces quarrés eſt conſtant, il en réſulte encore que les quarrés de deux ordonnées quelconques ſont entr'eux, comme le produit de leurs abſciſſes, c'eſt-à-dire, que $y^2 : Y^2 :: 2ax - x^2 : 2aX - X^2$; & attendu que l'axe $2a$, eſt infini dans la parabole, les quarrés x^2, X^2, y ſont nuls, à l'égard des rectangles $2ax$, $2aX$; ainſi, dans ce cas, l'analogie eſt : $y^2 : Y^2 :: ax : ax$, ou $y^2 : Y^2 :: x : X$.... &c. &c,

Il eſt évident que l'on pourroit trouver, en procédant de la ſorte, les autres propriétés des ſections coniques, en partant toujours des mêmes données m, n, ce qui paroît bien plus méthodique, & bien plus régulier, que de recourrir à de nouvelles données, comme font la plupart des Auteurs, lorſqu'ils ont à démontrer certaines propriétés de ces courbes; par exemple, l'expreſſion des axes, du paramètre.... &c. qui ne ſont que de ſimples fonctions des données m, n, doit viſiblement être déduite de ces mêmes données m, n; car de ſe borner à appeller $2a$, le premier axe; $2b$ le ſecond, comme on le pratique ordinairement, c'eſt rompre la chaîne des idées, & voiler le rapport que ces deux lignes ont avec les données m, n; ce qui peut être dit de tout autre rapport

que ces mêmes données, prises séparément, ou combinées avec les variables x, & y, peuvent avoir avec d'autres lignes, ou grandeurs résultantes des mêmes courbes. Nous venons de voir qu'en exprimant les axes, & le paramètre par les données m, n, l'on trouvoit tout de suite que le paramètre étoit la troisieme proportionnelle à ces mêmes axes, l'axe principal étant le premier de la proportion ; mais si l'on s'étoit borné à exprimer ces lignes par $2a$, $2b$, P, sans avoir auparavant prouvé que $2a = \frac{2mn}{\pm m \mp n}$; que $2b = 2\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$; que $P = \frac{mn + n^2}{m}$, il est clair que l'on n'auroit pu conclure immédiatement le rapport $2a : 2b :: 2b : P$, comme on peut l'inférer, en exprimant les mêmes quantités par les données m, n, dont elles ne sont que des fonctions, en cette sorte : $\frac{2mn}{\pm m \mp n} : 2\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}} ::$ $2\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}} : \frac{2mn + 2n^2}{m}$: & comme ce raisonnement s'applique aux autres propriétés des sections coniques, il paroît en résulter que la méthode qui auroit pour objet de déduire toutes ces propriétés des

ſeules données *m*, *n*, priſes ſeules, ou combinées avec les variables *x*, & *y*, ſuivant les cas, ſeroit tout à la fois plus réguliere, plus ſimple, & plus lumineuſe que celle que les Analyſtes y employent communément.



Observations sur la formule d'un binome a+b *élevé à une puissance quelconque* m, *attribuée à M. Newton.*

LA formule d'un binome $a+b$, élevé à une puissance quelconque m, est généralement attribuée à M. Newton ; l'on croit qu'il y auroit plus de justice à rapporter à M. Pascal, la gloire de cette découverte analytique, attendu qu'elle fait partie des propriétés du fameux triangle arithmétique, que ce célèbre Géomètre publia en 1654 ; c'est-à-dire, long-tems avant que le nom de M. Newton fût connu, ainsi qu'on va le démontrer.

										O	*M*	
A.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	*B*
C.		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	*D*
E.			1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	*F*
G.				1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	*H*
I.					1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	*K*
						1.	6.	21.	56.	126.	252.	
							1.	7.	28.	84.	210.	
								1.	8.	36.	120.	
									1.	9.	45.	
										1.	10.	
										P.	1.	
											N	

Soit en effet le triangle arithmétique *ABNPA*, les nombres qui composent ce triangle ingénieux sont tels que comptés de la gauche à la droite, c'est-à-dire, par rangs horizontaux, *AB*, *CD*, *EF*..... &c, ils expriment les coëfficiens numériques du premier, second, troisieme, quatrieme... &c. termes de toutes les puissances auxquelles un binome $a+b$, seroit supposé élevé. Les unités, par exemple, qui composent le premier rang *AB*, sont les coëfficiens du premier terme de ces mêmes puissances; c'est-à-dire, de $1.a^2$. $1.a^3$. $1.a^4$. . . . &c. ce qui est évident.

Les nombres naturels 1, 2, 3, 4. . . . . &c. qui forment le second rang *CD*, expriment par ordre la suite des coëfficiens du second terme de ces mêmes puissances; par exemple, 2, 3, 4. . . &c. sont les coëfficiens du second terme du binome $a+b$, élevé à la seconde, troisieme, quatrieme. . . &c. puissances, c'est-à-dire, de $2.ab$, second terme de $a+b$, élevé au quarré; de $3.a^2 b$, second terme de $a+b$, élevé au cube; de $4.a^3 b$, second terme de $a+b$, élevé à la quatrieme puissance. . . . &c. Il en est de même des troisieme, quatrieme, cinquieme rangs.... *EF*, *GH*, *IK*. . . . &c, dont les nom-

bres qui les composent expriment, par ordre, la suite des coëfficiens des troisiemes termes *EF*, des quatriemes termes *GH*, des cinquiemes termes *IK*... &c. de toutes les puissances auxquelles le binome $a+b$, seroit supposé élevé. Delà il suit qu'en prenant les rangs perpendiculaires *MN*, *OP*... &c, les nombres qui les forment exprimeront, la suite des coëfficiens des termes du binome $a+b$, élevé à une puissance déterminée ; par exemple, 10, 45, 120... &c. sont les coëfficiens du second, troisieme, quatrieme... &c. terme du binome $a+b$, élevé à la dixieme puissance. 9, 36, 84... &c. sont ceux du second, troisieme, quatrieme... &c. terme du même binome élevé à la neuvieme puissance, & ainsi des autres rangs perpendiculaires.

Telles sont les deux propriétés fondamentales de ce triangle numéral; à quoi on doit ajouter que les nombres, par exemple, 10, 45, 120, 210.... &c. pris de suite, expriment encore en combien de manieres dix choses peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre... &c. Ainsi, dix lettres, par exemple, prises une à une, donnent dix combinaisons,

quarante-cinq ſi on les prend deux à deux, cent vingt, priſes trois à trois, & deux cents dix, en les prenant quatre à quatre.... &c; enſorte que c'eſt la même choſe de trouver les coëfficiens 10, 45, 120, 210... &c. des termes, par exemple, de la dixieme puiſſance du binome $a+b$, ou de déterminer les différentes combinaiſons des dix racines de la puiſſance $\overline{a+b}^{10}$, priſes une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre... &c. Par exemple, 252, coëfficient du ſixieme terme d'un binome $a+b$, élevé à la dixieme puiſſance, exprime en même-tems les 252 combinaiſons des dix racines, priſes cinq à cinq, de cette puiſſance $\overline{a+b}^{10}$; ce qui peut être dit du coëfficient d'un terme quelconque de toute puiſſance à laquelle $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé. Ces différentes Obſervations avoient été faites par M. Paſcal lui-même, dans l'expoſition qu'il a faite des diverſes propriétés de ſon triangle arithmétique, & étoient connues de tous les Géomètres de ſon tems. L'on ſe ſervoit même de ce triangle pour trouver avec facilité les coëfficiens de tous les termes d'un binome $a+b$, élevé à une puiſſance déter-

minée quelconque, de maniere qu'il ne reſte plus qu'à prouver que la formule ſi célèbre $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \ldots$ &c. des coëfficiens numériques des termes d'un binome $a + b$, élevé à la puiſſance indéterminée m, appartient également à ce triangle arithmétique de M. Paſcal, d'où M. Newton l'a très-certainement tirée ; d'autant plus que ce grand Géomètre l'a expoſée purement & ſimplement, comme un fait vrai, ſans l'accompagner d'aucune démonſtration particuliere qui eût pu faire juger qu'il l'avoit déduite d'une théorie nouvelle, & qui lui ſeroit propre; ce qui fait dire à l'Auteur de l'Hiſtoire des Mathématiques(*a*) que *c'eſt ſans doute par la conſidération des nombres triangulaires* 1, *3, 6... &c. des nombres pyramidaux* 1, *4*, 10... *&c. que M. Newton parvint à démêler cette formule*, idée qui fait aſſez entendre que c'eſt au triangle Arithmétique même de M. Paſcal, que cette formule doit ſon origine. Pour trouver donc la formule $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-3}{3} . \frac{m-4}{5} \ldots$ &c. des coëfficiens numériques d'un binome $a+b$, élevé à la puiſſance quelconque m, par

(*a*) II. Vol. *pag.* 316.

le triangle arithmétique de M. Pascal, rien ne peut être plus simple, puisque cette formule y est très-clairement écrite. Et en effet, par une propriété de ce triangle, tous les nombres qui composent un rang perpendiculaire quelconque, par exemple, *MN*, ne sont autre chose que cette même formule appliquée à des nombres, ou cas particuliers; car dans le cas supposé, les nombres qui composent le rang *MN*, sont les coëfficiens de tous les termes d'un binome $a+b$, qui seroit élevé à la dixieme puissance. Ainsi dans ce cas, $m=10$; le premier terme de cette puissance sera donc : $a^{10}=a^m$; & le second terme $10a^9b=ma^{m-1}b$; mais le troisieme terme quarante-cinq, du triangle arithmétique est égal à $\frac{10\times9}{2}=\frac{m.m-1}{2}$. le quatrieme terme $120=\frac{10\times9\times8}{2.3}=\frac{m.m-1.m-2}{2.3}$; le cinquieme terme $210=\frac{10.9.8.7.}{2.3.4.}=\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4.}$.... &c. & ainsi de suite; ensorte qu'en multipliant successivement le second terme 10, du rang perpendiculaire *MN*, du triangle arithmétique, par tous les nombres 9, 8, 7, 6.... &c. qui sont sur le même rang hori-

zontal DC, & diviſant ces produits ſucceſſivement par 2, 3, 4...&c. ſuivant que les racines de la puiſſance $\overline{a+b}^{10}$, devroient ſe combiner 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4... &c. L'on trouveroit par ordre, par la propriété de ce triangle, les coëfficiens numériques 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 de tous les termes du binome $a+b$, élevé à la dixieme puiſſance; & attendu qu'il en ſeroit de même des coëfficiens des termes des autres puiſſances, auxquelles le binome $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé, par exemple, des coëfficiens OP, de la neuvieme puiſſance de $a+b$, leſquels ſeroient formés de même par $\frac{9.8}{2} . \frac{9.8.7}{2.3} . \frac{9.8.7.6}{2.3.4}$ ... &c; il s'enſuit que nommant en général m, la puiſſance à laquelle un binome $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé, les coëfficiens des termes de cette puiſſance ſeront, par le triangle arithmétique de M. Paſcal, $m . \frac{m.m-1}{2} . \frac{m.m-1.m-2}{2.3} . \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}$ ... &c. Il eſt donc vrai que cette formule des coëfficiens numériques, d'un binome quelconque $a+b$, élevé à une puiſſance quelconque m, eſt clairement écrite, ainſi qu'on l'a déja dit, dans le triangle arith-

métique de M. Paſcal ; & que c'eſt par conſéquent à M. Paſcal, & non point à M. Newton, à qui on eſt redevable de cette découverte intéreſſante, qui a été le germe de tant d'autres découvertes utiles, par l'uſage étendu que l'on a fait de cette formule en ſuppoſant *m*, un nombre quelconque, entier ou rompu, poſitif ou négatif.

On peut rendre cette vérité encore plus ſenſible, en réuniſſant, dans le triangle arithmétique même, les puiſſances d'un binome, par exemple, $x + a$, à leur coëfficient.

La ſeule inſpection de ce triangle, ainſi diſpoſé, démontre tout ce qui vient d'être dit. On voit à l'œil, que l'expoſant de la grandeur *x*, conſidérée dans toutes les colonnes perpendiculaires *MN*, *OP*... &c. y décroît d'une unité en deſcendant de *M*, vers *N*, ainſi qu'il arrive aux nombres naturels de la colonne horizontale *DC*, leſquels ſont les mêmes nombres que ceux des expoſans de la grandeur *x*, & donnent par conſéquent, étant multipliés entr'eux, & ſucceſſivement diviſés par 2, 3, 4.... &c, les mêmes produits que ceux qui réſulteroient de la multiplication ſucceſſive des expoſans de la grandeur *x*,

			O.	M.
1. x^6.	1. x^7.	1. x^8.	1. x^9.	1. $x^{10} a^0$.
C. 6. $x^5\ a$.	7. $x^6\ a$.	8. $x^7\ a$.	9. $x^8\ a$.	10. $x^9\ a$. D.
15. $x^4\ a^2$.	21. $x^5\ a^2$.	28. $x^6\ a^2$.	36. $x^7\ a^2$.	45. $x^8\ a^2$.
20. $x^3\ a^3$.	35. $x^4\ a^3$.	56. $x^5\ a^3$.	84. $x^6\ a^3$.	120. $x^7\ a^3$.
15. $x^2\ a^4$.	35. $x^3\ a^4$.	70. $x^4\ a^4$.	126. $x^5\ a^4$.	210. $x^6\ a^4$.
6. $x\ a^5$.	21. $x^2\ a^5$.	56. $x^3\ a^5$.	126. $x^4\ a^5$.	252. $x^5\ a^5$.
1. a^6.	7. $x\ a^6$.	28. $x^2\ a^6$.	84. $x^3\ a^6$.	210. $x^4\ a^6$.
	1. a^7.	8. $x\ a^7$.	36. $x^2\ a^7$.	120. $x^3\ a^7$.
		1. a^8.	9. $x\ a^8$.	45. $x^2\ a^8$.
			1. a^9.	10. $x\ a^9$.
			P.	1. a^{10}.
				N.

ſucceſſivement diviſés par les mêmes nombres 2, 3, 4.... &c.

On voit encore qu'un coëfficient quelconque, par exemple, 252, eſt toujours égal à $\frac{210 \times 6}{5}$, c'eſt-à-dire, au produit du coëfficient 210, du terme précédent, par l'expoſant 6, de la grandeur x, conſidérée dans ce même terme, diviſé par l'expoſant 4, de la grandeur a, accru d'une unité, ou, ſi l'on veut, diviſé par l'expoſant de la grandeur a, conſidérée dans le terme ſuivant, qui eſt préciſément le terme où les 10 racines de la puiſſance x^{10}, ſont priſes 5 à 5 ; ce qui fait que le produit 210 × 6, doit être diviſé par 5 ; car tout coëfficient, tel par exemple, que 210, en devenant le coëfficient 252 du terme ſuivant, doit croître par la multiplication de l'expoſant 6, de la grandeur x, & décroître par la divi-

sion du nombre qui exprimera le nombre des racines de la puissance qui devront être prises & combinées ensemble, & ce dernier nombre est toujours celui de l'exposant de la grandeur a, considérée dans le terme suivant qui, dans l'exemple présent, est $252.x^5 a^5$. Delà il suit que les coëfficiens seront successivement plus grands, quand l'exposant de la grandeur x, par lequel il faudra multiplier, sera plus grand que l'exposant de la grandeur a, par lequel il faudra diviser. Et ils seront moindres dans le cas contraire.

Si l'on nomme donc en général n, le coëfficient d'un terme quelconque d'un binome $x+a$, élevé à une certaine puissance; m, l'exposant de x, considéré dans ce terme; p, l'exposant de a, considéré dans le même terme; l'expression de ce terme sera $n x^m x^p$, & l'expression du terme suivant sera toujours, & dans tous les cas : $\frac{nm}{p+1} x^{m-1}a^{p+1}$. Et en effet, cherchons par cette formule tous les termes, contenus dans la colonne perpendiculaire, par exemple, *MN*; le premier terme donnera : $n=1$, $m=10$, $p=0$; donc : $\frac{nm}{p+1}$ $x^{m-1} a^{p+1} = \frac{1 \times 10}{0+1} x^{10-1} a^{0+1} = 10 x^9 a$, sera

l'expreſſion du ſecond terme ; mais ce terme donnera $n=10$, $m=9$, $p=1$. Le troiſieme terme ſera donc : $\frac{nm}{p+1}x^{m-1}a^{p+1}$ $=\frac{10\times 9}{1+1}x^{9-1}a^{1+1}=45x^8a^2$, mais ce troiſieme terme donne : $n=45$, $m=8$, $p=2$. Le quatrieme terme ſera donc : $\frac{nm}{p+1}x^{m-1}$ $a^{p+1}=\frac{45\times 8}{2+1}x^{8-1}a^{2+1}=120x^7a^3$. Il en ſeroit de même du reſte des termes de cette colonne perpendiculaire, & de tous ceux contenus dans les autres colonnes, donc la formule $\frac{nm}{p+1}x^{m-1}a^{p+1}$ exprimera tous les termes, excepté le premier, d'un binome $x+a$, élevé à telle puiſſance que l'on voudra. Si l'on fait le coëfficient $n=1$, la formule devient $\frac{m}{p+1}x^{m-1}$ a^{p+1} ; mais comme dans ce cas, le coëfficient m, ſurpaſſe ſeulement d'une unité l'expoſant $m-1$, de la grandeur x. Dès-lors $p=0$, & la formule ſe transforme en $mx^{m-1}a^1$, qui eſt l'expreſſion du ſecond terme d'un binome $x+a$, élevé à la puiſſance m : pour trouver le troiſieme terme, par la formule $\frac{nm}{p+1}x^{m-1}a^{p+1}$, il faudroit faire $n=m-1$, $p=1$; dès-

lors $\frac{nm}{p+1} x^{m-2} a^{p+1} = \frac{m \cdot m-1}{2} x^{m-2} a^2$, & continuant ainſi la même opération pour les termes ſuivans, l'on trouveroit la ſuite des termes, $m \cdot x^{m-1} a \cdot \frac{m \cdot m-1}{2} x^{m-2} a^2 \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} x^{m-3} a^3 \ldots$ &c. du binome $x+a$, élevé à la puiſſance m, par la formule générale $\frac{nm}{p+1} x^{m-1} a^{p+1}$.

De là ſuit une règle qui peut abréger, dans pluſieurs cas, les opérations à faire pour élever un binome $x+a$, à une puiſſance déterminée, comme par exemple, à la dixieme puiſſance. Je vois d'abord que le premier terme ſera x^{10}; le ſecond $10 x^9 a$; le troiſieme $\frac{10 \times 9}{2} x^8 a^2 = 45 x^8 a^2$; le quatrieme : $\frac{45 \times 8}{3} x^7 a^3 = 120 x^7 a^3 \ldots$ &c, en conſidérant ſimplement le dernier terme de la ſuite, l'on apperçoit ſur le champ ce qu'il faut faire pour trouver le terme ſuivant, par exemple, le dernier terme de la ſuite étant $45 x^8 a^2$. Je vois que pour trouver le coëfficient du terme ſuivant, il faut multiplier 45, par l'expoſant 8, de la grandeur x, & diviſer ce produit par l'expoſant 2, plus un, c'eſt-à-dire, par 3, du ſecond terme a,

du binome; enforte que le terme qui doit fuivre fera : $120 x^7 a^3$, & ainfi de tous les autres, l'expofant du premier terme du binome eft toujours celui par lequel il faut multiplier, & l'expofant du fecond terme, plus un, celui par lequel il faut divifer; parce que ce dernier expofant, accru d'une unité, exprime toujours le nombre des racines qui doivent être prifes & combinées enfemble, par les propriétés du triangle arithmétique. Il eft même évident que l'expofant du fecond terme a, du binome $x + a$, ne doit pas refter oifif dans la formule $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \ldots$ &c. Les numérateurs de cette formule étant le produit de tous les expofans du premier terme x, du binome; les dénominateurs feront le produit de tous les expofans du fecond terme a, du même binome; & c'eft à quoi cette formule eft finalement réduite, comme il réfulte de fa feule expofition : $\frac{m}{1} . x^m a^0 + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} x^{m-1} a^1 + \frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} x^{m-2} a^2 \ldots$ &c, en obfervant que les divifeurs 1, 2, 3... &c. font les expofans du fecond terme a, confidéré dans le terme fuivant de la formule.

FIN.

TABLE

DES MATIERES

Contenues dans cet Ouvrage.

Fin de la Table

ERRATA.

Page 14, *lig.* 18, $\frac{1}{\frac{D}{2}}$, *lisez* : $\frac{1}{\frac{D}{2}}$.

Page 16, *lig.* 10, $\frac{1}{D^2}$, *lisez* : $\frac{1}{D^2}$.

Page 49, *lig.* 6, $y = 2rx - x$, *lisez* : $y^2 = 2rx - x^2$.

Page 176, *lig.* 23, *ajoutez* (*Fig.* 23).

Page 264, *lig.* 2, $\frac{x^{n \quad m}}{n + m}$, *lisez* : $\frac{x^{n+m}}{n+m}$.

Page 269, *lig.* 9, $a^{\frac{2m-2n}{m}} \frac{2n}{m}$, *lisez* : $a^{\frac{2m-2n}{m}} \times \frac{2n}{m}$.

Page 281, *lig.* 2, $\overline{ax + bx}^{\frac{1}{2}}$, *lisez* : $\overline{ax + bx}^{\frac{3}{2}}$.

Page 283, *lig.* 23, premier, *ajoutez*, cas.

Page 292, *lig.* 4, $nx^{n-1}dx$, *lisez* : $nax^{n-1}dx$.

Ibid. *lig.* 5, nax^{n+1}, *lisez* : nax^{n-1}.

Ibid. *lig.* 9, my^{m+1}, *lisez* : my^{m-1}.

Ibid. *lig.* 18, $nax^{n \ 1}$, *lisez* : nax^{n-1}.

Page 294, *lig.* 18, $1 \times \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a^2 - 6ax^2 + 4x^2}$, *lisez* : $1 \times \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a^2 - 6ax + 4x^2}$,

Page 295, *lig.* 3 (*Fig.* 37), *lisez* (*Fig.* 34).

Page 317, *lig.* 1, qui ne différeroient, *lisez* : qui differeroient.

Pag. 367, *derniere lig.* $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{+m \mp n}}$ *lisez* : $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$.

Page 368, *lig.* 9, $\frac{m}{\frac{0}{\infty}} = \frac{m}{1}$, *lisez* : $\frac{m}{0} = \frac{m}{\frac{1}{\infty}}$.

APPROBATION.

J'ai lû, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, & approuvé un Manuſcrit qui a pour titre : *Elémens des Forces centrales, ou Obſervations ſur les Loix que ſuivent les Corps mûs autour de leur centre de peſanteur, ſuivies d'un jugement de l'Académie Royale des Sciences ſur pluſieurs de ces Obſervations, & d'un Examen critique de ce même jugement, à quoi on a joint un Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides, & quelques Obſervations ſur la nature des Courbes quarrables & rectifiables.*

Les forces centrales ſont démontrées, dans cet Ouvrage, d'une maniere très-élégante ; les grandes découvertes de Galilée, & d'Huighens s'y préſentent ſous la forme la plus ſimple, avec les ſeuls Elémens de la Géométrie ordinaire, & quelques propriétés des Sections coniques, que l'on peut auſſi regarder comme des Elémens, on peut entrer dans la lecture de cet Ouvrage, laquelle, avant le travail de l'Auteur, exigeoit un aſſez grand appareil de géométrie & de calcul.

Mais ce qui réveillera, ſans doute, l'attention des Phyſiciens Géomètres, c'eſt la conteſtation qui s'eſt élevée entre les Commiſſaires de l'Académie Royale des Sciences & l'Auteur, au ſujet des quatre Propoſitions qu'il a ſoumiſes au jugement de cette Académie. Conteſtation ſur laquelle il ne nous appartient point de prononcer ; les par-

ties étant convenues de s'en rapporter au jugement du Public.

Ce sera sans doute un spectacle bien intéressant pour le grand monde des Mathématiciens, de voir entrer en lice, d'une part, un illustre descendant du fameux Comte de Forbin, Chef d'Escadre, qui mesura, avec tant de succès, ses forces & son habileté contre celles des Anglois, & de l'autre la Légion sacrée, le corps formidable de l'Académie des Sciences, au sujet du demi-Dieu de l'Angleterre, de l'immortel Newton. A la vérité, c'est ici une guerre de plume, d'argumens & de démonstrations, où l'on ne verra point le sang couler; mais un combat, sans effusion de sang, pour la gloire de la plus noble portion de l'homme; une victoire qui donnera la plus haute considération, à l'un des deux partis sans détruire l'espece humaine, ne sont-ils pas fort préférables à ces carnages, à ces boucheries, dont l'histoire fait horreur; massacres, qui n'aboutissent souvent qu'à une petite augmentation de territoire, avec quoi l'estomach du vainqueur ne digère pas mieux, & ne prend pas un morceau de plus.

Nous ne pouvons donc qu'applaudir aux vues de l'Auteur, M. le Chevalier de Forbin; il ne s'est pas contenté de servir sa Patrie avec distinction dans la carrière des armes; mais, épris de la vraie grandeur de l'homme, il cherche encore, pendant la paix, à porter la lumière dans les esprits, sans commettre aucunement ni la sûreté, ni la tranquillité des corps. A Paris, ce 9 Juin 1773.

L'abbé DE LA CHAPELLE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conſeillers les gens tenans nos Cours de Parlement & Conſeils Supérieurs, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le Chevalier de FORBIN, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & donner au Public, *Elémens des Forces centrales, ou Obſervations ſur les Loix que ſuivent les corps mûs autour de leur centre de peſanteur, de ſa compoſition.* s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes : Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun extrait ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril mil ſept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du préſent Privilége ;

qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier, Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit ſieur DE MAUPEOU; le tout à peine de nullité des Préſentes; du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayant cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le vingt-troiſieme jour du mois de Février l'an de grace mil ſept cent ſoixante-quatorze, & de notre Régne le cinquante-neuvieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

LE BEGUE.

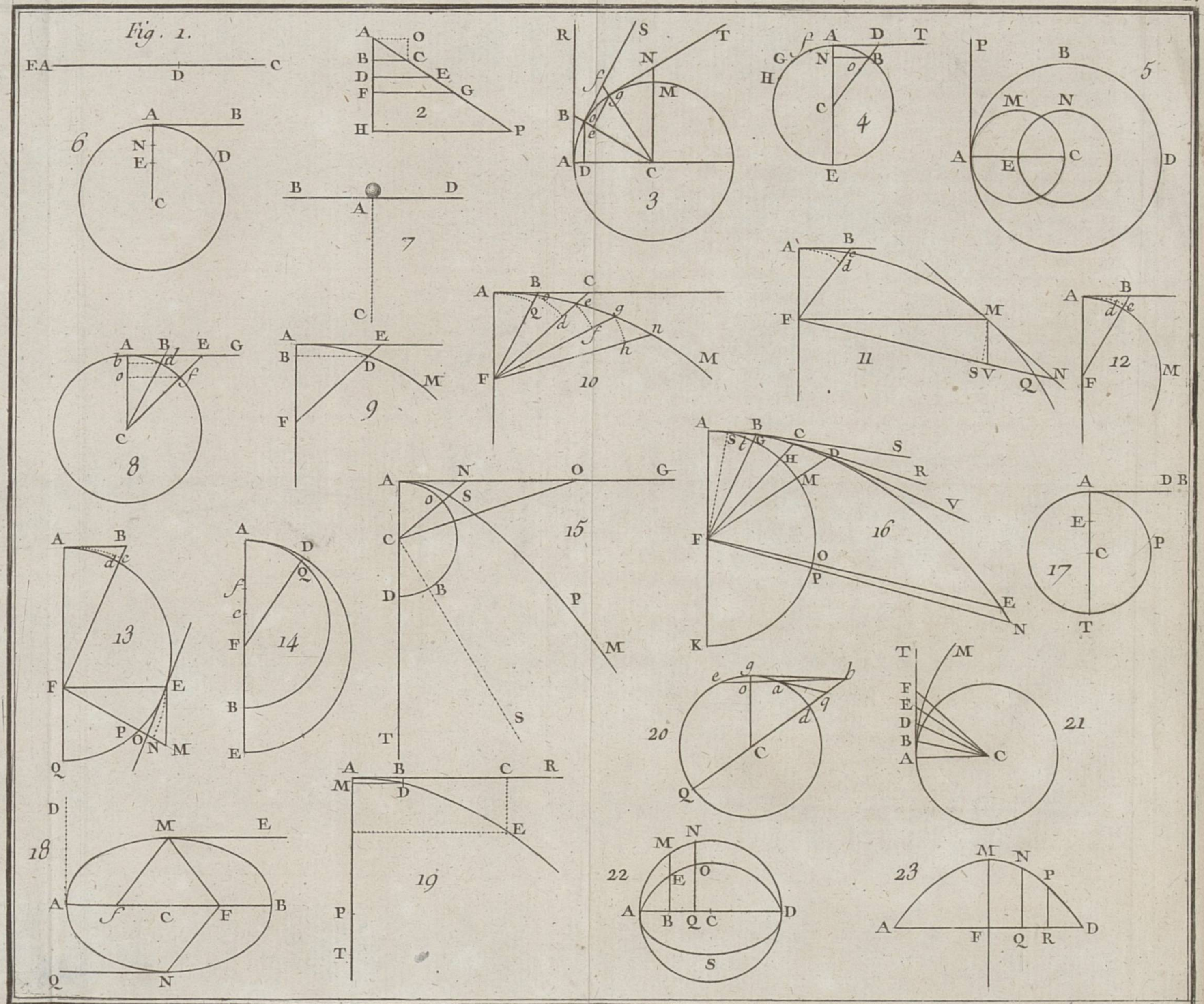
Regiſtré le préſent Privilége & enſemble la ceſſion ſur le Regiſtre XIX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 1951. in-fol. 224. conformément au Réglement de 1723. A Paris, ce 22 Mars 1774.

C. A. JOMBERT pere, *Syndic.*

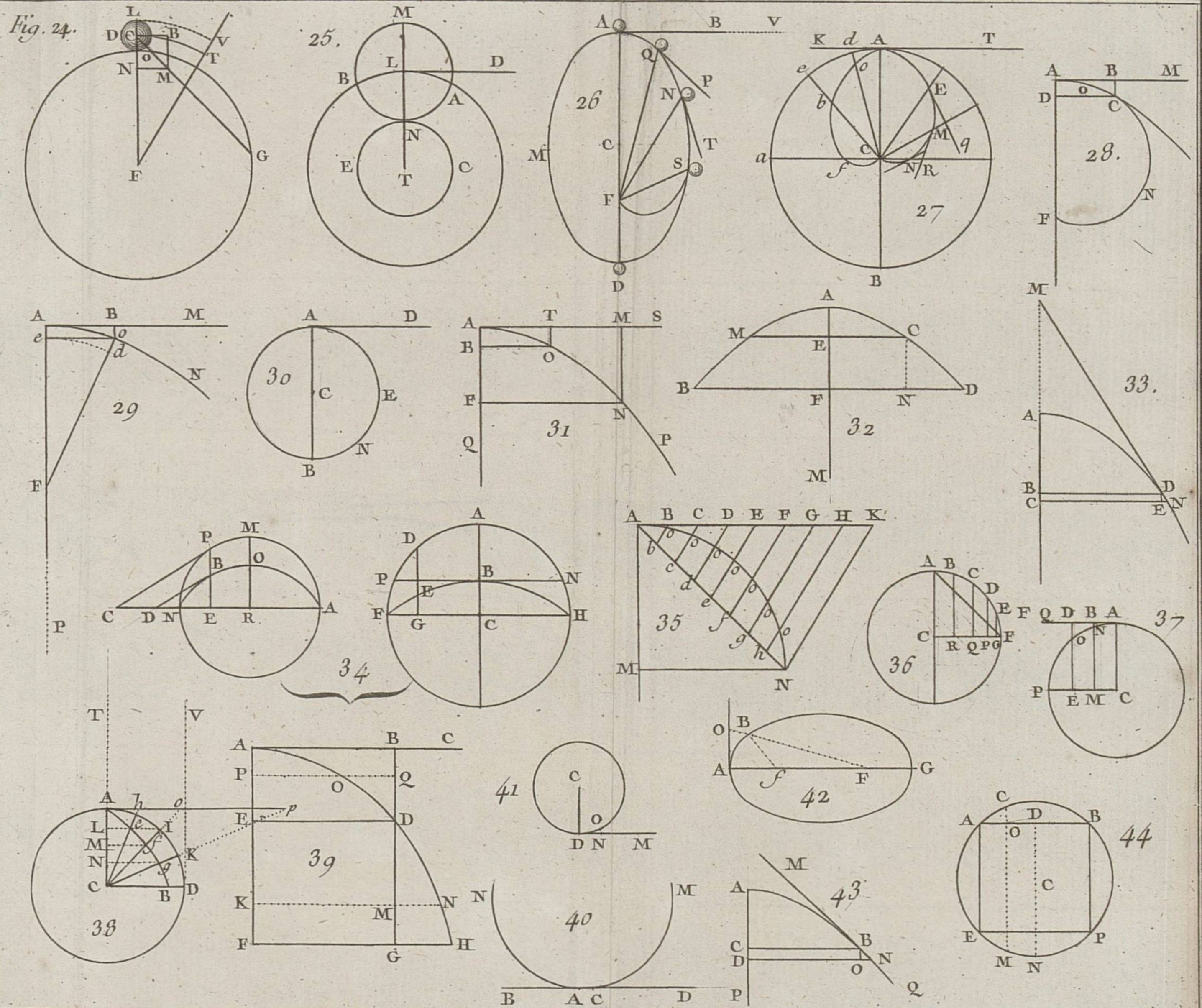
Je céde & tranſporte le préſent Privilége à Madame Veuve Deſaint, pour en jouir elle & ſes ayants cauſes, comme de choſe à elle appartenante, ſuivant les conventions faites entre nous. A Paris, le 11 Mars 1774.

Le Chevalier de FORBIN.

De l'Imprimerie de L. F. DELATOUR, 1774.



De la Gardette Sculp.



De la Gardette Sculp.

RECHERCHES PHILOSOPHIQUES *SUR L'ÉVIDENCE* DES VÉRITÉS GÉOMÉTRIQUES,

Avec un projet de nouveaux Élémens de Géométrie.



A AMSTERDAM,
& se trouve
A PARIS,
Chez KNAPEN & DELAGUETTE, Libraires-Imprimeur, au bas du Pont S. Michel.

M. DCC. LXXIII.

FAUTES à corriger aux Principes de Géométrie, & sur-tout à la Proposition V, Page 112.

PAGE 109, *lig.* 17. & d a d, *lis.* & d a c.
P. 110, *lig.* 11. AC, *lis.* a e.
Id. *lig.* 20, isosceles égaux; *lis.* isosceles égaux; (on peut appeller un angle isoscele quand il est fermé par l'arc qui le mesure, car alors on juge de son ouverture & de la longueur de ses côtés).
P. 112, *ligne* 2. F B, *lisez* E B.
P. 114, *ligne* 5. M B, *lisez* E B.
Id. *ligne* 6. B G M, *lisez* E A B.
Id. *ligne* Id. & G B est, *lisez* & la moitié G B de cette hypotenuse est.
Id. *lignes* 7, 8 & 9. *effacez* de l'angle droit B G M qui se termine à l'extrêmité B de l'hypotenuse B M, & *lisez* de l'arc M B.
Id. *ligne* 15. I A B, *lisez* G A B.
P. 115, *ligne* 12. paralleles D X, *lisez* paralleles d'égale longueur D X.
P. 120, *ligne* 1. K F, *lisez* K E.
P. 125, *ligne* 19. l'agle, *lisez* l'angle.
P. 126, *ligne* 4. ou, *lisez* au.
P. 130, *ligne* 5. F E, *lisez* f e.
Id. *ligne* 24. j q, q p, *lisez* j p p h.
Id. *ligne* 25. p h, *lisez* h.
P. 131, *lignes* 4, 6, 11. q, *lisez* p.
Id. *ligne* 8. r, *lisez* c.
Id. *lignes* 9, 17, 19. &c. *lisez* &.
P. 132, *ligne* 4. q, *lisez* p.
P. 133, *lignes* 7, 12, 16, 18. &c. *lisez* &.
P. 134, *ligne* 14. o, *lisez* q.

P. 135, *lignes* 2, 9. o, *lisez* q.
P. 137, *ligne* 25. y, *lisez* g.
P. 141, *lignes* 8, 9, 12, 23. Y, *lisez* V.
Id. *lignes* 10, 11. c, *lisez* g.
P. 145, *ligne* 22. E, *lisez* F.
P. 148, *ligne* 2. G H, *lisez* A B.
Id. *ligne* 2. la ligne E E, *lisez* la ligne établie sur G F, & de ce point au point E pris pour centre.
Id. *lignes* 3 & 4. *effacez* Du point E & de l'intervalle E F pour rayon.
Id. *ligne* 13. A B C E, *lisez* A B C D.
Id. *ligne* 18. A C, *lisez* A D.
Id. *ligne* id. dernier, *lisez* quarré inscrit.
Id. *ligne* 19. premier, *lisez* quarré circonscrit.



PRÉLIMINAIRES, OU EXAMEN DES AVANTAGES DE LA GÉOMÉTRIE SUR LA MÉTAPHYSIQUE.

ON ſera peut-être ſurpris qu'il ſoit néceſſaire de prouver l'évidence des vérités géométriques ; mais cette ſurpriſe ne peut affecter que ceux qui ne ſont pas verſés dans l'étude de la Géométrie ; car cette Science répand, par ſes abſtractions métaphyſiques, des doutes juſque ſur les démonſtrations les plus lumineuſes, parce qu'elle ne ſe borne pas aux connoiſſances que nous pou-

vons acquérir avec certitude, & au de-là desquelles on ne peut atteindre qu'à de vaines spéculations qui en imposent, & qui ajoutent l'erreur à notre ignorance. Nous ne devons donc pas étendre nos recherches au de-là des limites qui nous sont prescrites par la nature; mais ces limites renferment un fonds inépuisable de vérités, par lesquelles les hommes pourront étendre les progrès des Sciences.

On s'est déterminé d'abord, peut-être trop indiscretement, cependant avec beaucoup de défiance, à faire de nouvelles recherches sur quatre Problêmes, dont la solution seroit la clef de la *grande* Géométrie, on pourroit même dire, de la Géométrie *transcendante*; mais les tentatives que l'on a faites jusqu'à présent pour y parvenir, ont eu si peu de succès, qu'elles n'attirent

aujourd'hui que du mépris à ceux qui osent entrer dans cette carrière. Son abord est si séduisant, qu'on se livre facilement à l'espérance de découvrir le trésor qui y est caché; mais il est comme décidé que ces recherches sont vaines & illusoires, parce que l'on a beaucoup cherché & que l'on n'a pas trouvé, & que les méprises sont très-fréquentes dans ces recherches; ce qui doit au moins inspirer beaucoup de circonspection & exciter à multiplier beaucoup les procédés & les démonstrations, pour dissiper les doutes: car, en Géométrie, un doute bien fondé est une réfutation.

Excepté la marche de déduction, qui a toujours été instructueuse dans ces recherches, on n'a pas négligé les moyens & les différentes voies praticables pour arriver à la vérité, autant qu'elle peut être mise en évi-

dence par la Géométrie démonſtrative, proprement dite, & généralement reconnue. On ne donne d'abord que quelques opérations d'un travail plus étendu, pour ſe ſoumettre préalablement au jugement des grands Maîtres, qui ne dédaignent pas de porter leurs regards ſur un genre de recherches ſi décriées. S'il ſe trouvoit quelque mépriſe dans la démonſtration de la *Triſection de l'Angle*, qui eſt la principale partie & la plus contentieuſe, on en donne enſuite pluſieurs autres de différentes formes pour y ſuppléer, & pour ſe procurer déciſivement le ſuffrage des Géomètres & des Phyſiciens; je dis des Phyſiciens, parce qu'ils peuvent *meſurer* indépendamment des *calculs ſublimes*, & que leur Science exige qu'ils jugent démonſtrativement des rapports des grandeurs bornées, ſans ſortir des limites du

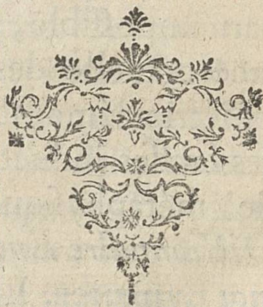
cognoscible, ce qui ne demande, pour *compter*, que l'usage de l'Arithmétique ordinaire; car la Géométrie démonstrative ne s'étend pas jusqu'à la Géométrie des imperceptibles, qui n'est pas susceptible de démonstrations, parceque, démontrer c'est montrer, & celle-ci ne peut se concilier avec la Géométrie démonstrative, que par des suppositions conditionnelles, qui tendent à la rapprocher, mais idéalement, de l'évidence des vérités positives des grandeurs bornées, & qui au reste nous laissent dans l'incertitude; car il n'y a pas d'autre évidence pour nous, que celle qui est décidée par les sens; mais on n'aime pas cette précision, elle gêne trop l'esprit. Les sens, dit-on, sont trompeurs: oui; mais ce sont les sens eux-mêmes qui nous détrompent, & il n'y a qu'eux qui puissent nous détrom-

per : il n'y a qu'eux aussi qui nous assurent de l'exactitude des démonstrations géométriques, ou qui nous découvrent les erreurs qui doivent les faire rejetter, & qui nous avertissent des erreurs de la main dans les opérations qui ne satisfont pas exactement aux conditions requises dans les constructions géométriques. Si on passe au-delà du temoignage des sens, on sort de la sphère de l'evidence. Cependant on s'assujettira ici, autant qu'il est de convention, aux suppositions idéales de la théorie abstraite dans les démonstrations des Problêmes, pour ne pas donner lieu à des contestations, sous prétexte d'innovations. Mais néanmoins on doit avertir ici, que le principal objet qu'on a en vue dans ces recherches géométriques, est l'évidence, qui doit partout caractériser la certitude de nos

connoiſſances. C'eſt ſur-tout par la Géométrie, qui eſt une Science de première éducation, & la Science des grandeurs viſibles, qu'on doit aſſujettir l'eſprit à l'étude rigoureuſe de l'évidence ſtricte; mais pour rendre l'autorité prédominante de cette évidence plus remarquable en Géométrie, il a fallu ſoumettre à ſon Tribunal la déciſion des Problêmes les plus contentieux, & dont la ſolution a paru impoſſible, à cauſe de l'inſuffiſance actuelle des élémens de la Géométrie démonſtrative, & à cauſe des fauſſes inductions de la Géométrie métaphyſique. *Voyez dans le Dictionnaire Encyclopédique, au mot* ÉVIDENCE. La Géométrie ſembloit fournir des objections contre la théorie qui y eſt expoſée; il falloit diſſiper ces objections par les démonſtrations de la Géométrie,

dans les cas même où elle paroissoit se refuser aux démonstrations.

On va voir par les questions & les objections suivantes, qui ont été faites à l'Auteur, jusqu'à quel point les idées métaphysiques, qui se sont introduites dans la Géométrie, ont obscurci la théorie de cette Science.



QUESTIONS faites à l'Auteur.

COMME il est impossible de s'entendre, lorsqu'on employe les mêmes mots à designer des idées différentes, il faudroit, avant de pouvoir discuter rien avec l'Auteur, sçavoir de lui :

RÉPONSES de l'Auteur.

I°.

S'il a lu Euclide, & s'il regarde la Géométrie de cet Auteur comme de bonne Géométrie, comme de la Géométrie démonstrative.

I°.

J'adopte en tout la Géométrie démonstrative d'Euclide & celle de M. Clairaut en tant que démonstrative, rigoureusement parlant, & séparément de tout ce qu'il y a de théorie spéculative indécise ; ainsi, je sépare de la première la Métaphysique ou les idées indéterminées & indéterminables, parce qu'elles ne peuvent conduire à aucune décision démonstrative ; & je sépare de la seconde les fausses applications du calcul intégral établi sur des fractions irrationnel-

les, ou racines ſourdes, qui exigent qu'on néglige, dans le détail, les petits excédens & les petits déficiens; car ce calcul n'eſt pas applicable aux meſures rigoureuſes des grandeurs, parce qu'il eſt infidele ou inſuffiſant; & je crois qu'il ne pourroit avoir lieu que pour les autres genres de quantités connues par des obſervations qui ne s'étendent pas juſqu'à la préciſion, & que l'on ne peut évaluer que par eſtimation; ce qui peut s'allier aſſez bien avec un calcul de même genre; mais ces évaluations d'approximation arbitraire ne doivent pas être confondues avec les démonſtrations géométriques. Ce débrouillement ne doit pas non plus être regardé comme une nouvelle Géométrie démonſtrative; car il ne s'agit ici que de la Géométrie démonſtrative ordinaire dégagée de ce qui lui eſt étranger, qui obſcurcit la théorie de cette Science, & qui induit à des erreurs que l'on confond avec les connoiſſances les plus évidentes.

Ainſi on doit convenir qu'il eſt permis à tout Auteur, lorſqu'il s'agit d'une théorie qui n'eſt pas exacte, d'employer le langage qu'il croit le plus conforme à la réalité des objets qu'il diſcute, parce que les expreſſions, telles qu'elles ſoient, ne changent pas la nature des êtres, qui eſt toujours la

baſe des Sciences : & quand un Auteur y examine le vrai & le faux, il eſt rare que les Lecteurs ſe méprennent ſur la ſignification des mots, lorſque la diſcuſſion ne leur déplaît pas ou ne heurte pas leurs idées favorites, & ils ne cherchent pas à tirer de l'Auteur quelques aveux dont ils pourroient faire uſage.

Je viens de déclarer que j'adopte en tout la Géométrie démonſtrative d'Euclide; ainſi je ne crois pas qu'à cet égard mon langage ſoit différent de celui des Géomêtres, tant qu'il ne s'agit pas de Métaphyſique, où les Géomêtres n'ont pas le droit, par leur langage, de faire la loi aux Philoſophes.

On parle, dans les queſtions que l'on me fait, de ma Géométrie, comme ſi j'avois une autre Géométrie démonſtrative que celle d'Euclide. Je déclare que je n'en ai point d'autre, même dans la ſolution des Problêmes, qu'Euclide a peut-être cru impoſſible; car mes démonſtrations y ſont établies, comme les ſiennes, ſur des rapports géométriques déciſifs, compris dans les conſtructions géométriques aſſujetties aux principes conſtitutifs de la Géométrie démonſtrative.

Cette explication ſervira à fixer le vrai ſens de mes réponſes aux autres queſtions.

I I°.

Si la Géométrie de l'Auteur forme un tout lié de sorte que cette nouvelle Géométrie doive être regardée comme fautive en tout ; si on prouve qu'elle l'est dans la solution d'un seul Problême, ou bien au contraire, si, après avoir démontré que la mesure qu'elle donne pour la diagonale d'un quarré n'est pas exacte, il faudroit encore prouver qu'il en est de même de la division de l'angle, &c.

I I°.

Je réponds que la Géométrie démonstrative n'est pas par sa nature une Science qui consiste dans un enchaînement qui assujettisse les démonstrations les unes aux autres ; car non-seulement les Problêmes différens, mais aussi un même Problême, peuvent être traités par différentes constructions qui chacune peuvent conduire à une démonstration particulière & même à plusieurs démonstrations particulières si différentes entr'elles, que les méprises qui peuvent se glisser dans les unes, n'influent pas sur les autres ; ce qui est si connu que le Geomêtre, qui fait la question, ne peut pas l'ignorer. Il y a sans doute dans cette question une équivoque, qui se développera dans les objections, contre le rapport numérique du côté du quarré avec la diagonale, sur le

ſuccès deſquelles il paroît que l'on compte beaucoup : j'en entrevois la raiſon ; & cette raiſon ſera une raiſon ſourde de calcul qu'on oppoſera à la démonſtration géométrique ; cependant je ne vois pas quel rapport pourroit avoir ce genre d'objections avec les démonſtrations géométriques de la diviſion de l'angle. Penſeroit-on auſſi qu'elle ſeroit incommenſurable, parce qu'on la croiroit incalculable ? Alors on auroit trouvé dans le calcul à racine ſourde l'enchaînement auquel on pourroit penſer que la Géométrie démonſtrative devroit être aſſujettie. On fera ſans doute de grands efforts pour mettre cette idée en évidence ; car elle eſt fort ténébreuſe, & cache des contradictions inévitables.

III°.

Ce que l'Auteur entend par deux lignes égales entre elles ? S'il lui ſuffit pour les regarder comme égales, qu'elles ne different pas d'un point ſenſible ?

III°.

Oui ; parce que le point géométrique ou ſenſible diſtingué du point idéal mathémathique, eſt le dernier terme déciſif des meſures géométriques, quand ce terme a un rapport invariable avec tous les autres points qui lui ſont corrélatifs dans une même conſtruction géométrique.

I V°.

Si ce que l'Auteur appelle un point, ne seroit pas, non quant à la définition mais dans la réalité, ce que les autres Géomètres appelleroient une surface très-petite, dont la figure & la mesure échappent aux sens ?

I V°.

Je dis qu'un point géométrique ne doit pas être pris pour un point physique, considéré comme une étendue divisible, mais seulement pour une marque sensible la plus petite que l'on puisse poser pour déterminer les rapports géométriques : ainsi on ne lui demande d'autres conditions que celle d'être perceptible ; car autrement il faudroit dire, qu'indépendamment des points & des lignes géométriques, toute la Géométrie se trouveroit distinctement sur une feuille de papier blanc ; ce qu'on ne peut pas admettre, sans doute, même avec le secours du calcul infinitésimal, qui ne présente pas de points géométriques pour établir des constructions démonstratives, sans lesquelles il n'y a point de Géométrie réelle, ou qui puisse être réalisée ; aussi exige-t-on que la trisection de l'angle soit exécutée avec la règle & le compas, c'est-à-dire, avec des points & des lignes géométriques, ce qu'on dit impossible. Cependant on croit

être arrivé par le calcul infiniment près de la quadrature du cercle ; mais on n'a pas pu en donner la conſtruction démonſtrative néceſſaire pour l'exactitude & la facilité des opérations géometriques qui en dependent ; & même pluſieurs grands Geomêtres penſent qu'il eſt impoſſible d'y parvenir.

V°.

Pourquoi l'Auteur, qui reproche aux Géomêtres les points ſans longueur & les lignes ſans largeur, ſe permet dans ſon Ouvrage de conſidérer des ſurfaces ſans profondeur ?

V°.

Je ne ſçais pas où l'on a trouvé que je reconnoiſſe explicitement des ſurfaces ſans profondeur; peut-être ſeroit-il arrivé que, dans quelque cas j'aurois employé, ſans conſéquence, le langage de la théorie ſpéculative des Géomètres, que j'ai expreſſément ſéparé de la Géométrie démonſtrative, que j'adopte comme la ſeule Géométrie poſitive.

S'il reſte encore quelques doutes à l'Auteur des queſtions ſur le langage uſité dans la Géométrie démonſtrative, on lui préſentera des principes de Géométrie rendus ſenſibles par la conſtruction détaillée des conditions qui conſtituent leur eſſence & leurs propriétés relativement à la Géo-

métrie démonſtrative & à la ſolution des divers Problêmes aſſujettis aux cas particuliers ; car, dans les traités qu'on fait, il faut convenir des *poids* & des *meſures*, & nous ne voulons vendre & acheter qu'avec des *poids* & des *meſures* admis dans le Commerce.



OBJECTIONS.

L'Auteur dit dans son Ouvrage Problême II, que le rapport des quatre côtés du quarré à la diagonale, est comme 68 à 24; & toute sa démonstration se borne à dire que son cercle A E C coupe la ligne BD au point E, de manière que la ligne (E 17) soit la vingt-quatriéme partie de BD : or c'est ce qui n'est point vrai; elle est plus petite; l'Auteur s'en assurera en faisant le raisonnement suivant.

Soit le quarré K (Planche III, fig. 2) & sur sa diagonale le quarré Z; les angles *qZY*, *YZc*, *pZq*, étant droits, comme il est évident par la construction, il est clair que le quarré Z, égal aux quatre triangles qui ont leur sommet en Z, sera égal à quatre fois le triangle *pZc*, puisque ces triangles sont égaux en-

tr'eux, & par conſéquent égal à deux fois le quarré K.

Cela poſé, je ſuppoſe que j'aye diviſé la ligne *p c* en 24 parties, que de chacune de ces parties élevant des perpendiculaires diviſant *q* Y qui lui eſt égale, en 24, & menant des paralleles *a*, Y, *c* par chaque des diviſions, je diviſerai le quarré ſur *p c* en 576 petits quarrés : ſi je prends enſuite une ligne égale à 17 fois la vingt-quatriéme partie de *p c*, ſon quarré contiendra 289 des mêmes petits quarrés, donc le double en contiendra 578, nombre plus grand que 576; donc le quarré de *p c* ſera plus petit que deux fois le quarré de Z *c*; donc cette ligne ne ſera pas égale à dix-ſept parties de *p c*.

On prie l'Auteur de vouloir bien faire la conſtruction indiquée ci-deſſus, & d'obſerver que, d'*après la Géométrie d'Euclide*, *p d* ne peut être 17, lorſque *p c* eſt 24.

Je voudrois ſçavoir ſi le point géométrique de l'Auteur a un rapport aſſignable en nombre avec chaque ligne qui entre dans la conſtruction d'un Problême ; s'il ſuffit qu'il ſoit inſenſible à la vue, ou s'il eſt néceſſaire qu'il le ſoit au microſcope.

Si la démonſtration de l'Auteur, pour le rapport de la diagonale, eſt fautive, celle de la triſection de l'angle l'eſt également, en ce que l'Auteur ſuppoſe dans toutes deux, que deux points coincident entre eux, lorſque leur diſtance eſt plus petite que la pointe de ſon compas, pointe qui a une groſſeur très-réelle; ainſi il ſuppoſe, dans les deux cas, qu'une diſtance réelle eſt nulle.

Les conſtructions que les Géomètres propoſent pour les Problêmes de l'Auteur, le conduiroient à des réſultats qui lui paroitroient auſſi exacts, & les mêmes que les ſiens ;

toute la différence vient de ce que les Géomètres donnent une construction exacte, & que la sienne differe de la vraie d'une quantité insensible ; & si les Géomètres donnoient les constructions de l'Auteur, au lieu de dire (trouver le rapport de la diagonale au quarré, ils diroient, trouver, à un 24me près, par exemple, le rapport de la diagonale au quarré, ou bien trouver, d'une manière aussi approchée qu'on voudra, &c.) & l'Auteur peut être bien sûr qu'on auroit ainsi en nombre entier les rapports de toutes ces quantités qu'il cherche ? Mais que ces rapports ne sont qu'approchés, quoique moins éloignés encore du rapport exact que ceux qu'il propose.



RÉPONSES.

LES deux problêmes qu'on attaque n'exigent aucune discussion sur les points & les lignes géométriques, ni sur les points & les lignes mathémathiques : cette discussion nous jetteroit dans des écarts que nous pouvons éviter ici; car on ne suppose rien dans les opérations de ces Problêmes, qui ne soit adopté par tous les Géomètres; & quant aux conséquences, c'est l'évidence logique qui doit décider.

Ainsi il faut nous expliquer de manière que tout le monde sçavant puisse nous entendre, & juger, en nous retenant dans les limites du cognoscible, que la Géométrie ellemême a fixées par ses pétitions.

La condition qu'on exige dans le Problême sur la trisection de l'angle, est qu'il soit exécuté avec la

règle & le compas, c'eſt-à-dire, avec des points & des lignes géométriques, & avec l'accord ſous-entendu qu'elles doivent avoir avec les points & les lignes mathématiques, tel qu'il eſt convenu par les pétitions ou principes géométriques, les définitions, les axiomes, les proportions évidentes, &c.

Ces principes ſe rapportent auſſi à la conſtruction des quarrés.

Tout ceci poſé, & qu'on ne peut pas me refuſer, nous pouvons marcher en règle. Il s'agit donc d'examiner tout ſimplement & immédiatement, s'il ne ſe trouve pas dans les conſtructions qu'on préſente quelques rapports géométriques qui ne puiſſent ſe concilier avec la Géométrie intellectuelle, ou avec les principes reçus : c'eſt ce qu'on peut examiner dans la démonſtration de la planche I. & dans l'échelle des trois quarrés, planche III. fig. 2,

où l'on voit par les triangles qu'ils renferment, que les quarrés K, Z & Y ſont trois quarrés duplicatifs & reduplicatifs, dont Z eſt double de K & ſoudouble de Y qui eſt quadruple de K; ce qui nous ramenera à la démonſtration géométrique & intellectuelle du rapport numérique de la diagonale avec le côté du quarré, ce qui ſera décidé d'ailleurs par le nombre de parties égales que doit contenir la ſurface de chaque quarré; alors on verra qu'il ne faut pas comparer en nombre la diagonale du quarré K avec cette même diagonale devenue le côté du quarré Z, & que c'eſt une fauſſe marche échappée dans l'objection, qu'on auroit évitée par une échelle de trois quarrés au lieu de deux; car le rapport du troiſiéme quarré avec le premier décide le nombre de parties de la ſurface du ſecond relativement à celles de la ſurface des

deux autres : peut-être a-t-on trouvé ce rapport trop embarraſſant.

Nous avons paſſé légerement ſur la futilité de l'objection, établie ſur les imperceptibles indéterminables, qui ſembleroit tendre à détruire la certitude de la Géométrie démonſtrative, ſi elle étoit abandonnée à ces abſtractions idéales ; mais cette Science eſt fondée ſur des principes évidens qui ne redoutent pas de pareilles attaques, qui ne ſervent qu'à exercer les Novices dans les ruſes de la petite guerre ſcholaſtique. Cependant on vient de nous démontrer un quarré par des points & des lignes géométriques.

Mais je reconnois ici un Sçavant qui veut bien ſe donner la peine d'examiner mes Problêmes, qui démontre avec des points & des lignes géométriques, & qui comprend qu'une ligne étant partagée en deux par une autre ligne, les deux parties

de la ligne divisée ont chacune leur part de la largeur de la ligne qui les divise, & qu'il ne reste rien en propre à cette dernière que sa fonction de marquer sensiblement le lieu de la division, en laissant aux parties divisées toute leur étendue; c'est en effet ce qui est toujours sous-entendu intellectuellement dans les pétitions géométriques décidées par l'évidence primitive, qui est le fondement de toute démonstration.

Ainsi je crois que c'est un Juge qui cherche à s'assurer de bonne foi de la vérité par des voies lumineuses, qui montrent l'étendue de ses connoissances & la droiture de ses intentions.

Les subtilités métaphysiques que je crois ici de trop, ont acquis une si grande autorité, que je ne puis disconvenir qu'elles ont dû entrer d'abord dans la discussion, mais sans préjudicier aux pétitions de la Géo-

métrie démonſtrative, ſans leſquelles cette Science n'exiſteroit pas.

D'où s'enſuit, qu'après bien des détours inutiles, il faut revenir au fait; c'eſt-à-dire, aux conſtructions & aux démonſtrations: & c'eſt tout d'abord la marche des perſonnes éclairées qui veulent abréger la route & cheminer à découvert, & qui laiſſent aux Sophiſtes la Métaphyſique, qui n'eſt qu'une *Phyſique indéterminée*, où les indéterminables ſe prêtent facilement aux aſtuces d'une Logique fallacieuſe.

Mais, reſſouvenons-nous qu'il s'agit préſentement d'un Problême qu'il faut démontrer avec la règle & le compas, & conformément aux élémens de la Géométrie vulgaire, afin qu'on ne m'impute pas de préſenter ici une nouvelle Géométrie où on ne comprend rien; c'eſt la dernière reſſource des Adverſaires, qui croient qu'on ne peut

faire de nouvelles recherches ſans ſe frayer de nouvelles routes, & qui ne penſent pas qu'on peut parvenir à des découvertes en examinant les objets avec plus d'attention.

Pour faire des découvertes dans la Phyſique géométrique indéterminée, il faut y démêler les meſures déterminables d'avec les meſures indéterminables; c'eſt-à-dire, les meſures qui peuvent être aſſujetties à des termes évidens ou perceptibles, d'avec celles qui excluent abſolument toute évidence déciſive. C'eſt peut-être ce diſcernement du *cognoſcible* d'avec l'*incognoſcible*, qu'on appelle une Géométrie nouvelle : mais, ce ſeroit dire que la Géométrie démonſtrative n'a pas encore exiſté, & qu'elle n'exiſtera pas, ſi on employe artificieuſement le nom de nouvelle Géométrie pour la dédaigner & ſe diſpenſer de la réfuter, ou pour obtenir un délai

illuſoire, ou bien pour faire entendre que la Géométrie que l'on propoſe eſt inintelligible; comme ſi on pouvoit changer la nature des figures géométriques, & faſciner les yeux des Géomètres. Cette petite ruſe paſſagere réuſſit un peu à ceux qui ont une réputation aſſez impoſante, pour laiſſer des ſoupçons d'incertitude ſans ſe compromettre vis-à-vis le vulgaire; mais c'eſt un nuage tranſparent qui n'obſcurcit pas entierement l'évidence ou le *criterium veritatis*, qui décide impérieuſement. A la vérité cette évidence ne ſe manifeſte pas dans les meſures, dont les termes ſont imperceptibles. Car, ſans la condition des termes ſenſibles, l'évidence ſeroit exclue de la Géométrie, & alors ce ne ſeroit plus une ſcience réelle & déciſive, car elle n'auroit d'autre évidence que celle des relations intellectuelles indéterminées & inaſſignables.

La ſimple *perception* de cette exactitude abſolue n'eſt pas une évidence de démonſtration, réduite à nos connoiſſances d'*apperceptions*, leſquelles ne s'étendent pas juſqu'aux limites indéterminables des meſures des grandeurs : mais on peut être aſſuré qu'elles ſont compriſes dans la plus petite étendue ſenſible où ſe borne l'évidence géométrique, qui eſt ſi déciſive qu'elle fait enfin diſparoître la diſſimulation ou le maſque d'une ignorance affectée ; mais il faut faire attention que l'évidence d'apperception n'appartient qu'à l'étendue, & qu'elle ne s'étend pas juſqu'à l'exactitude abſolue, mais juſqu'à un point ſenſible le plus petit qu'on puiſſe poſer ; ainſi l'évidence d'apperception eſt une évidence propre à la Géométrie, & il ne faut pas la confondre avec les perceptions logiques, qui peuvent s'étendre juſqu'aux abſtrac-

tions, & qui ne donnent aucune connoissance des mesures des grandeurs bornées. Il n'y a donc d'autre évidence géométrique que l'évidence d'apperception, qui compare des grandeurs bornées avec d'autres grandeurs bornées ; & voilà précisément ce que c'est que la Géométrie proprement dite.

Nous n'employons pas ici, où nous parlons en toute rigueur philosophique, le nom de points ; car dans le vrai, il n'y a pas de points réels de précision absolue en Géométrie, relativement aux mesures. Les mesures des divisions géométriques ne supposent entr'elles qu'un contact immédiat des parties divisées. qui exclut tout intervalle & tout point réel, parce que le point réel seroit compris dans le contact ou hors du contact, & ne seroit jamais au juste l'extrêmité même d'une mesure, qui n'admet rien en elle

même qu'elle-même, qui eſt la fin ou la ceſſation de cette meſure : or à ce terme, un point n'eſt pas concevable, pas même comme fiction, fût-il imaginé comme infiniment petit ; car l'infini n'eſt pas le fini ; ainſi la ceſſation de la meſure ne ſeroit pas un point, mais l'extrêmité ou le bord du point que l'on prétendroit concevoir idéalement.

La raiſon proſcrit ces difficultés diſcordantes, fauſſes & captieuſes établies ſur des parcelles de fractions irrationnelles, futiles & incompréhenſibles, & qui ne peuvent pas ſervir de baſe à une ſcience.

Mais on cherche à ſe tromper ſoi-même par une abſtraction ſéduiſante, en croyant imaginer un point ſans étendue, dont l'imagination ne peut fournir l'image qu'en y ſuppléant par un nom qui déſigne un être qui n'eſt rien, & qui eſt réel, par la mémoire de l'idée d'un point

réel qui ſe confond ſubrepticement avec le néant; ce qui s'établit facilement par un langage qui n'a point de ſignification diſtincte, & cette fauſſe monnoie eſt reçue ſans défiance. On joint un point ſans étendue à un autre point ſans étendue, avec l'idée qu'ils ſe touchent par leurs extrêmités, & forment une longueur, ſans penſer que des points ſans étendue n'ont point d'extrêmités, & qu'ils ne peuvent être dans leur réunion les uns hors des autres, ſi ce n'eſt par l'intervention d'une fauſſe idée de grandeur, qu'on ne peut leur attribuer, & qui implique contradiction, même dans une abſtraction; car une abſtraction doit ſéparer & non réunir des idées incompatibles.

Ainſi, pour exclure toute équivoque & toute idée inintelligible, nous ne concevons pas le point mathématique, ni la ligne mathéma-

tique, ni la ligne géométrique comme un point, comme une ligne, mais comme un terme ou une limite d'étendue. Si je dis, par exemple, qu'une ligne physique droite ou circulaire est composée d'une infinité de parties réelles qui se touchent, je dois reconnoître que ces parties sont rassemblées en lignes par une infinité de bords, par lesquels elles se touchent, & que ces bords se trouvent à toutes les mesures des divisions des partages que je fais de cette ligne; & c'est à ces bords mêmes, & non aux parties divisées, que je fixe mon attention : alors je conçois qu'il n'y a rien entre ces bords, car ils ne seroient pas des bords qui se touchent, s'il y avoit quelque chose, c'est-à-dire, quelqu'intervalle entr'eux.

Les divisions géométriques ne sont que des divisions dessinées sans désunion physique, sans déplace-

ment des parties diviſées, & ſans aucun dérangement dans leur contact ni dans leur continuité. Ainſi les diviſions deſſinées ou géométriques doivent toujours être diſtinguées des diviſions phyſiques, pour en avoir une idée exacte.

Or les bords d'une meſure ne ſont pas diviſibles, car ils ſont le *nec plus ultrà* de cette meſure. Je conçois donc que ce terme n'eſt pas lui-même une étendue; mais il peut être le bord d'un point ou d'une ligne géométrique, & il peut auſſi ſe trouver dans ce point ou dans cette ligne, ſelon les différens rapports des meſures géométriques, auxquelles il doit être aſſujetti.

Toute ligne intellectuelle, qui coupe une autre ligne, y traverſe l'infini à l'endroit même où eſt une grandeur finie : or ce n'eſt point l'infini, mais le fini qui eſt l'objet de la Géométrie; & on doit apper-

cevoir que ces points, que l'on appelle point physique & point mathématique, sont dans la réalité la même chose, mais que dans le vrai ce ne sont pas des points ; ainsi le nom de point ne peut leur convenir que metaphoriquement : il en est de même pour les lignes en Géométrie, & aussi dans le dessein, où les traits du Dessinateur indiquent les contours; mais les contours ne sont pas des traits. Le point & la ligne géométriques marquent sensiblement les termes imperceptibles que nous désignons par les noms de points & de lignes mathématiques ; mais ces limites imperceptibles ne sont ni des points ni des lignes; cependant, parce qu'ils sont imperceptibles, il nous faut des points & des lignes sensibles pour les indiquer; & ces points, ces lignes sont les bornes du *cognoscible décisif.*

Cherchez donc idéalement le fini

par des lignes intellectuelles qui traverſent l'infini en paſſant entre deux unités continues diviſibles à l'infini; c'eſt par là que la Géométrie peut démêler deux choſes, l'infini & le fini, qui ſemblent ſurpaſſer l'intelligence du Géomètre, du Calculateur & du Philoſophe, qui voient toujours l'infini dans le fini, & qui ne voient point le fini dans l'infini.

Le fini ſe termine à rien, & ſouvent le calcul n'a pas de marche aſſurée pour y arriver; & nos ſens ne peuvent le ſaiſir, étant toujours voiſin d'une diminution ou diviſion progreſſive de grandeurs imperceptibles, dont l'exiſtence ne peut être indiquée que par des points & des lignes géométriques, ſans connoiſſances préciſes de lieu ni de formes, ni de meſures phyſiques ni numériques qui conduiſent à ce rien où il n'y a qu'une continuité d'unités &

point d'unités ni droites, ni courbes; ainſi nulle différence ici entre la ligne circulaire & la ligne droite. Repréſentez-vous les côtés d'un angle, d'un polygone comme les deux branches d'un compas qui s'approchent également, ſe réuniſſent, ſe touchent & ne laiſſent rien entre elles; tel eſt le terme du fini, que l'on cherche en vain par l'infini dans l'infini, & entre les unités continues qui forment l'infini & ſes infiniment petits. Le fini eſt par-tout & ſe confond par-tout dans l'infini, & on ne penſe qu'à des unités & à des nombres, & jamais à ce rien qui limite le fini entre les unités: c'eſt pour cela que le calcul infinitéſimal peut donner, ſi l'on veut, des nombres pairs ou impairs pour la même opération; c'eſt pour cela auſſi qu'on renvoye quelquefois à l'infini la rencontre de deux lignes qui s'approchent réciproquement l'une &

l'autre vers un terme commun * ; c'eſt pourquoi encore tant de diſcordance entre la Métaphyſique & la Géométrie démonſtrative.

Mais toujours ces notions des imperceptibles ne peuvent être indiquées que par des points & des li-

* On a cherché la quadrature du cercle par le moyen des polygones inſcrits & circonſcrits ; mais on a trouvé des racines ſourdes qui ont arrêté le calcul, & on a attribué à la Géométrie l'inſuffiſance même du calcul ; ainſi ce qui eſt incalculable a été regardé comme incommenſurable. Alors les démonſtrations géométriques ont diſparu, & les meſures des grandeurs bornées ſe ſont perdues dans l'infini, où l'on tâche de les ſoumettre à des modifications de calcul plus ſpécieuſes que déciſives : auſſi n'a-t-on pas ſuivi cette route dans la démonſtration de la quadrature des lunules d'Hipocrate, qui eſt toute Géométrique. Donc, lorſqu'on ne confondra plus le calcul abſtrait avec la ſcience de meſurer, on les ramenera facilement à l'évidence des démonſtrations géométriques aſſujetties à des points & à des lignes géométriques, & où le point géométrique de ſection ſera toujours la principale cheville ouvrière, ou la principale pétition géométrique des opérations de la

gnes ſenſibles, & jamais par des nombres & par des abſtractions purement idéales, & il ne faut jamais prendre la conſéquence pour le principe, ou l'indiqué pour l'indiquant, ni confondre l'évidence avec la Métaphyſique, c'eſt-à-dire, avec

---

Science de meſurer. Ainſi on ne peut pas plus refuſer d'admettre auſſi la quadrature géométrique du cercle, que celle des lunules.

Il faut donc toujours revenir au point géométrique, & le reconnoître pour le dernier terme déciſif des meſures géométriques; auſſi n'a-t-il jamais exiſté d'autre Géométrie poſitive, que celle qui meſure par des lignes ou des points ſenſibles, leſquels renferment, au dedans d'eux-mêmes, les petites parties imperceptibles & indéterminables, & qui auſſi conſtatent par eux-mêmes la certitude des meſures, non pas juſqu'à l'exactitude abſolue, mais avec toute l'exactitude poſſible, portée au de-là même des nombres & des fractions irrationnelles; laquelle eſt équivalente intellectuellement à l'exactitude abſolue, en déſignant le terme reſpectif des grandeurs meſurées & conſervées dans leur intégrité.

Il eſt vrai que ces points & ces lignes géométriques donnent des fractions qui embarraſſent le Calculateur; mais l'évidence des démonſtra-

la Physique indéterminée : l'évidence est une faculté de celui qui apperçoit, & non une propriété de l'objet apperçu ; ainsi le discernement des idées & leurs rapports de convenance & de disconvenance ne sont que des dépendances de nos

---

tions géométriques est indépendante de l'insuffisance du calcul : & malgré tous les subterfuges & les pratiques ingénieuses des grands Calculateurs, la Géométrie ne fléchira jamais vis-à-vis le calcul ; car il faut toujours que les calculs, quelqu'abstraits qu'ils puissent être, soient fondés sur des mesures, même ceux des ellipses célestes formées par une pesanteur en raison inverse des quarrés des distances & réciproquement ajustées par des rapports de calculs abstraits ; ce qui pourroit faire soupçonner un cercle vicieux, qui retourneroit toujours de l'inconnu à l'inconnu. Mais nous ne voulons pas pousser nos recherches jusque dans ces détails mystérieux, & nous respectons des travaux admirables suivis par une multitude de Calculateurs célèbres, qui sans doute n'ont pas voulu se fixer à des hypothéses, ni perdre des résultats assujettis aux observations ; mais toujours faudroit-il encore que le calcul empruntât ou supposât les mesures rigoureuses de la Géomé-

ſenſations & du phyſique de notre être ſenſitif, dont les perceptions & les apperceptions ne ſont point dans les objets apperçus, quoique ces objets ſoient les cauſes conditionnelles de nos ſenſations & de nos idées complettes & incomplet-

---

trie poſitive, pour déterminer les formes de ces ellipſes fictices déſignées par le calcul.

On a porté ſi loin l'application du calcul abſtrait à la Géométrie, qu'il en réſulte des difficultés & des contradictions, qu'on imputeroit à la Géométrie poſitive ou au calcul qui lui eſt aſſujetti, ſi on n'appercevoit pas qu'elles n'exiſtent que dans une complication forcée par des tentatives de toute eſpece & ſans bornes, où il ſemble qu'on ait entrepris de ſoumettre la Géométrie poſitive aux calculs abſtraits.

Mais les meſures géométriques ſont ſi rigoureuſes & ſi déciſives, qu'elles ſeront toujours inattaquables, malgré les petites chicanes ſur les points géométriques mal conçus & pris pour des bornes tout ſimplement, & non pour des bornes qui indiquent d'autres bornes qui doivent être ſous-entendues, pour conſerver l'intégrité des grandeurs meſurées, ſans cependant ſéparer l'indiqué de l'indiquant, ni prendre par abſtraction la conſéquence pour le principe, comme

tes, ſimples & compoſées, abſtraites & concretes, & des liaiſons logiques qui forment nos jugemens; tout cela ſe rapporte à des cauſes & à des effets phyſiques connus déterminément ou indéterminément; & ce dernier cas eſt ce que

---

l'on fait dans les calculs dérangés par des fractions irrationnelles, où l'on cherche le fini par des modifications captieuſes & infinitéſimales, qui ne peuvent ſe rapporter au fini abſolu d'une meſure géométrique, qui n'eſt pas relatif à des unités numériques. Ainſi, quoique les Calculateurs eux-mêmes réprouvent ſéverement en Géometrie l'étendue des points géométriques, ils n'héſitent pas cependant à côté de cette grande ſévérité, de ſe donner, dans leurs calculs, des licences peu ſcrupuleuſes, qui, dans les progreſſions du petit au grand, peuvent conduire à de grandes erreurs qu'on ne peut éviter que par la propriété des points & des lignes géométriques, qui ſont toujours les mêmes dans les grands comme dans les petits cercles concentriques.

Auſſi faut-il toujours revenir aux pétitions géométriques, c'eſt-à-dire, aux points & aux lignes géométriques, avec la condition ſous-entendue, que l'intégrité des grandeurs meſu-

nous appellons Métaphyſique, & que l'on a regardé comme une Science particuliere & ſupérieure à la Phyſique, laquelle cependant n'eſt qu'une Phyſique imparfaite & fort inſidieuſe, ſur-tout en Géomé-

---

rées, réduit à rien ces points & ces lignes. C'eſt pourquoi, en rigueur géométrique, les noms de points & de lignes ne doivent être entendus que métaphoriquement, ſans perdre de vue, cependant, leur fonction d'indiquer le lieu du terme des meſures des grandeurs bornées dans les démonſtrations géométriques deſſinées par des points & des lignes ſenſibles, dont la place eſt tracée ſur les bords des parties meſurées. Auſſi ſeroit-il impoſſible de retrancher ſeulement de la Géométrie le point de ſection, qui eſt un point ſenſible, ſans anéantir la Géométrie démonſtrative & métaphyſique.

Cette Phyſique peut être entendue clairement, néanmoins elle reſte fort embrouillée, parce que le diſcernement s'étend rarement juſqu'aux perceptions intellectuelles, & que l'eſprit eſt peu exercé à les démêler d'avec les ſenſations qui les indiquent; & où il y a à diſtinguer de petites parcelles indéterminables, qui ſeroient toujours reconnues par elles mêmes en Géométrie, ſi elles n'étoient obſcurcies par des alliages hétérogênes.

trie, où elle est adaptée à des indéterminables.

Ces développemens sont nécessaires pour bannir de la Géométrie des disputes fort embrouillées, que l'abus des mots & des perceptions indéterminables y ont introduites : on les y porte si loin, que, dans la discussion présente, on a voulu soutenir que, si la démonstration d'un Problême étoit fausse par inattention à une fraction irrationnelle où l'on ne peut saisir le point mathématique, celles des autres Problêmes quelconques établis régulierement sur le point géométrique, seroient fausses aussi. Cependant on trouvera dans une échelle de trois quarrés duplicatifs & reduplicatifs une démonstration fausse & deux démonstrations vraies. De telles assertions sont trop hasardées pour être sincères.

Il regne donc une confusion gé-

nérale dans la Géométrie, par les ſignifications équivoques des mots métaphoriques de points & de lignes, (faute d'être entendus métaphoriquement) une confuſion d'idées qui obſcurciſſent toute la théorie de cette Science; auſſi n'eſt-ce que ſur des points incompréhenſibles, c'eſt-à-dire, ſur des points ſans étendue & ſur des lignes ſans largeur, que l'Auteur, qui nous attaque, a établi tous les raiſonnemens qu'il voudroit oppoſer aux pétitions géométriques, aſſurées de tout tems par l'évidence contre les ſubtilités de la Métaphyſique la plus alambiquée, employées ſérieuſement à des diſcuſſions vétilleuſes, ſur les démonſtrations géometriques. Ainſi le premier pas de la marche de l'eſprit humain en Géométrie, doit être le débrouillement des notions primitives, & le diſcernement de leur certitude, de

leurs limites, & de leurs rapports essentiels.

Cette théorie, qui dévoile les abus des fausses applications de la Métaphysique & des calculs abstraits à la Géométrie démonstrative, est traitée plus sçavamment & plus amplement par M. d'Alembert, dans ses élémens de Philosophie; mais il paroît que les études du commun des Géomètres ne s'étendent pas jusques-là : ceux-ci se livrent plus volontiers aux petites subtilités contentieuses qui étincellent dans les ténèbres, où il leur paroît que les démonstrations géométriques doivent pénétrer jusqu'à l'exactitude absolue, qu'ils ne distinguent pas de l'exactitude stricte où l'homme peut atteindre. Si vous leur demandez un échantillon de cette Géométrie sublime, ils vous répondront qu'on ne peut pas la montrer, & qu'elle ne peut s'appercevoir que

par les yeux de l'esprit : mais leur Métaphyſique, pointilleuſe & mal entendue, ne laiſſe pas ignorer qu'ils ſe bornent à copier de la Géométrie, dont la certitude ne leur eſt connue que par l'authenticité du témoignage des Fondateurs de la Géométrie, qui leur paroiſſent avoir établi purement les pétitions géométriques ſur des points mathématiques indiqués par des points phyſiques ſenſibles, ſans penſer que ces points mathématiques ſont indéterminables.

Eſt-ce que l'Auteur qui nous fait des objections, n'y auroit pas penſé non plus ? Il eſt vraiſemblable au moins qu'il ne reviendra pas nous demander une Géométrie qu'il n'a jamais vue, & qui ne peut exiſter. Quelques Novices pourront encore s'y méprendre ; mais il faut leur laiſſer le tems de démêler leurs idées. Quant aux démonſtrations, nous

ne demandons grace à perſonne pour les conditions déciſives requiſes & obſervées de tout tems rigoureuſement par les Géomètres, qui ont connu, par eux-mêmes, la certitude des démonſtrations.

Il ne reſtoit plus à notre ſçavant Adverſaire qu'à réfuter en regle géométriquement; tous ſes efforts ſe ſont bornés à attaquer par un faux calcul le rapport numérique de la diagonale avec le côté du quarré; mais la Géométrie, qui eſt elle-même la pierre de touche du calcul, a diſſipé l'objection. *Voyez le Corollaire du Problême II. & la diſcuſſion ſur le point de rencontre indetermine page 33 & ſuivantes.*



RECHERCHES PHILOSOPHIQUES *SUR L'ÉVIDENCE* DES VÉRITÉS *GÉOMÉTRIQUES.*

TRISECTION DE L'ANGLE.

Lemme. (Pl. I.)



Deux cercles égaux qui se croisent réciproquement de la circonférence au centre, divisent en trois parties égales leur diamètre commun, & divisent aussi en trois parties égales tous les arcs renfermés exactement entre leurs circonférences, & qui passent par leur centre.

1°. Les deux cercles Q, L coupent leur diamètre commun *o p*, en *c* & en *b*, en trois parties égales ; car le cercle L a son centre

à la circonférence du cercle Q ; lequel a de même son centre à la circonférence du cercle L. Ainsi les trois parties *p c*, *c b* & *b o* du diamètre *o p*, commun à l'un & à l'autre cercle, sont des rayons de ces cercles. Or les rayons de cercles égaux, sont égaux ; donc les trois parties *p c*, *cb* & *b o* de la ligne diamètrale *op* sont égales entre elles.

2°. L'arc *d c b a*, qui traverse les deux cercles Q, L en passant par leurs centres *c b*, est aussi divisé en trois parties égales, parce que les cordes de chaque partie *d c*, *c b* & *b a*, sont des rayons des deux cercles égaux Q, L.

Tout homme capable de saisir l'Évidence, peut, sans être Géomètre, reconnoître la certitude de ces vérités, indépendamment d'aucunes formules géométriques qu'on appelle *Démonstrations* ; car ces formules ne sont jamais aussi claires, aussi simples, aussi tranchantes que l'évidence de premier aspect ou primitive ; c'est-à-dire, celle qui n'a pas besoin d'être extraite par déduction d'autres vérités reconnues, & qui se manifeste par elle-même & maîtrise l'esprit, sans l'entremise d'aucune vérification artificielle, ni d'aucun raisonnement logique, telles que sont les *pétitions* ou demandes géométriques, qui, rigou-

reusement parlant, sont les élémens de la Géométrie démonstrative, & les premiers instrumens décisifs pour les mesures des démonstrations géométriques.

3°. Il est encore évident que tout autre arc, qui traverse de même deux arcs qui se croisent réciproquement de la circonférence au centre, sera pareillement divisé en trois parties égales par ces deux cercles.

Il ne s'agit donc, pour avoir la *Trisection de l'Angle*, que de placer exactement ce Lemme sur les côtés d'un angle proposé, pour être divisé, par l'arc qui le mesure, en trois parties égales.

PROBLÊME I.

Placer le Lemme précédent sur les côtés d'un angle donné, par l'entremise d'un second angle qui lui est égal & dont les côtés sont assujettis au même Lemme, qui le divise en trois parties égales.

CONSTRUCTION. (Pl. I).

Soit D E A, l'angle donné.

Décrivez le demi-cercle I H G F à discrétion, selon que vous voudrez que la fi-

gure de la construction soit plus ou moins grande.

Divisez le diamètre I F de ce demi-cercle en trois parties égales I N, N M, M F.

Tirez les deux perpendiculaires I V & F T paralleles à la diamétrale E K. Tirez de même les deux perpendiculaires N S & M R paralleles à la diamétrale EK.

Tirez à discrétion la ligne *o p* au-dessus de la ligne P O, parallele & égale au diamètre I F du demi-cercle I H G F.

Divisez cette ligne *o p* en trois parties égales *p c*, *c b*, *b o*.

Du point *c* au point *b*, & du point *b* au point *c* décrivez les deux cercles L & Q.

Prenez la mesure du côté E *t* de l'angle donné D E A, coupé en *t* & en *r*, par les deux paralleles I *p* & F *o*.

Portez cette mesure E *t* de *b* en H sur la parallele N *c*, & de *c* en G sur la parallele M *b*.

Tirez la ligne H G, qui coupera perpendiculairement en *e* la diamétrale EK.

De *e* en *b*, décrivez l'arc *a b c d*, renfermé dans les deux cercles Q & L.

Tirez sa corde *d a*, formez l'angle *d e a*; tirez les deux lignes *d g* & *a j*, paralleles à la diamétrale K E.

Prenez la mesure *e b*; portez-la de E en

D & décrivez l'arc DCBA terminé par les deux paralleles *g d* & *f a*; tirez ſa corde D A, qui ſera égale à la corde *d a*. Par les points C, B, tirez la ligne OP, qui ſera égale à *o p*, diamètre commun des deux cercles Q & L.

De B en C & de C en B décrivez les deux cercles X & Z, qui paſſeront par l'extrêmité de la corde DA de l'arc DC BA qui meſure l'angle donné DEA, & qui eſt égal & ſemblable à l'arc *d c b a*, & l'arc qui le meſure ſera renfermé dans les deux cercles X & Z, & paſſera par les centres : ainſi il ſera diviſé en trois parties égales par ces deux cercles, qui ſe croiſent de la circonférence au centre ; & l'angle donné & ſon arc ſeront diviſés auſſi en trois parties égales par les deux lignes B E & CE, de même que l'angle *d e a* ſon égal eſt diviſé en trois parties égales par les deux lignes *be* & *ce*.

Cette conſtruction ne s'étend pas beaucoup au-delà de l'angle droit. Ainſi quand l'angle donné ſera obtus, on le remplacera par ſon angle de ſupplément. D'ailleurs, on donne dans la ſuite de ces recherches beaucoup d'autres conſtructions qui s'étendent à tous les angles aigus & obtus.

Si on veut placer immédiatement le

Lemme ſur les côtés de l'angle donné ſans l'entremiſe d'un ſecond angle formé ſur le Lemme, on prendra la meſure Et, on la portera de N en B ſur la parallele M R, & de-là on tracera l'arc B P; on portera la même meſure E t de M en C ſur la parallele N S, d'où l'on tracera l'arc C O, ce qui régle d'avance la place de la ligne O P, qui eſt le diamètre commun des deux cercles X, Z, ſur lequel, en le diviſant en trois parties égales, on pourra achever la conſtruction.

Du point E au point B, on décrira l'arc D C B A qui meſure l'angle donné D E A, & qui ſera renfermé dans les deux cercles X & Z, & paſſera par les deux centres, ſans qu'il ſoit beſoin pour terminer cet arc, des deux paralleles *d g a f*.

DÉMONSTRATION.

Elle ſe trouve dans les meſures mêmes de la conſtruction. L'angle *d e a* eſt établi ſur le Lemme, lequel eſt établi auſſi ſur les côtés de l'angle donné. Ces deux angles ont l'un & l'autre même baſe, même hauteur, & mêmes diviſions. Les arcs qui meſurent chacun de ces angles ſont égaux & ſemblables; leurs cordes *d a* & D A ſont égales, & forment les côtés oppo-

ſés du rectangle *d g f a* qui renferme les deux angles, leurs arcs & leurs cordes.

L'arc qui meſure l'angle *d e a*, eſt renfermé dans les deux cercles L & Q, & paſſe par leurs centres; donc ils le diviſent en trois parties égales. L'arc qui meſure l'angle D E A eſt renfermé auſſi dans les deux cercles X & Z, qui ſont égaux aux cercles L & Q, & paſſe auſſi par leurs centres: donc il eſt diviſé pareillement en trois parties égales par ces deux cercles X & Z.

REMARQUE.

Si l'on diſoit que le point compliqué D eſt un point de rencontre & indéterminé, on ne feroit pas attention que c'eſt un point de rencontre de réunion meſuré par ſon correlatif *d*, & décidé par la conſtruction.

Cette remarque eſt néceſſaire, car quelquefois, ceux qui examinent les démonſtrations ſe fixent ſi déciſivement aux points de rencontre, qu'ils ne diſcernent pas toujours, ſi ces points de rencontre ſont des points de rencontre de réunion, ou des points de rencontre d'approchement; & ſi un point de rencontre d'approchement eſt du genre de ceux qui ſont invariables, & équivalent à un point de réu-

nion dans la Géométrie démonſtrative : on prend toujours le point de rencontre pour une ſuppoſition ou un paralogiſme qui fait rejetter la démonſtration, ſi l'Auteur n'eſt pas en garde contre ces jugemens hazardés. Il en eſt de même des démonſtrations indirectes ou poſtiches, & des argumens abſtraits de la Géométrie des imperceptibles, qui réduit tout en doute, en prétendant arriver à la même exactitude que l'intelligence ſuprême, qui ne doute jamais. La *Géométrie méthaphyſique* & le *calcul méthaphyſique* réduits à des idées indéterminées, ne donnent jamais que des notions abſtraites & générales qui ne ſont pas toujours applicables, avec évidence, aux vérités poſitives de la Géométrie démonſtrative. Et par-tout les notions abſtraites, ſéparées des idées concretes, même les axiômes méthaphyſiques n'engendrent que des ſophiſmes. Quand on dit que deux & deux ſont quatre, on ſuppoſe, ſans doute, des quantités égales, que deux toiſes & deux toiſes, par exemple, ſont quatre toiſes ; mais il faut que les toiſes ſoient connues & dénommées, pour que l'axiôme ſoit évident, autrement, cet axiôme pourroit n'être pas vrai ; car deux toiſes & deux pieds ſont quatorze ; cet axiôme ſeroit un ſophiſme. On ne ſauroit

être trop en garde contre les abstractions idéales, lesquelles formoient jadis l'art illusoire des Sophistes & des Pyrroniens. Ainsi ceux qui jugent en Géométrie, & ceux qui y sont jugés, ont bien des écueils à éviter.

COROLLAIRE.

Division géométrique de la circonférence du Cercle en 360 dégrés, & le dégré à l'infini.

Divisez en trois parties égales l'arc d'un angle du décagone, qui est de 36 dégrés. Chacune des parties de cette Trisection sera de 12 dégrés; divisez encore une de ces parties en trois dont chacune aura quatre dégrés, que vous diviserez & soudiviserez par moitié jusqu'à un dégré, ces soudivisions, par moitié, pourroient ensuite se continuer à l'infini, si l'art pouvoit les exécuter; mais elle peut aller aussi loin que la Géométrie démonstrative sensible peut l'exiger, dans les démonstrations les plus précises de la Cyclométrie.

On pourroit rassembler plusieurs autres Corollaires de la Trisection de l'angle, qui s'étendent aux deux proportionnelles

entre deux extrêmes, à d'autres Problêmes réputés ſolides, & à divers Problêmes réſervés au calcul, & que la Triſection de l'angle ramene à la Géométrie démonſtrative proprement dite. On ne parle pas encore du fameux Problême de la quadrature du Cercle; car il faut ſavoir auparavant ce que l'on demande: ſi c'eſt une quadrature Métaphyſique, qui eſt hors de la Sphère de l'évidence, ou ſi c'eſt une quadrature Géométrique, qui ſeroit auſſi un Corollaire de la triſection de l'angle; il en eſt de même de la déployée Métaphyſique de la circulaire, & de la déployée Géométrique; parce que, faute de principes théoriques décidés, on conteſteroit éternellement ſans s'entendre: car aucune des démonſtrations, même des *Elémens d'Euclide*, ne pourroit tenir contre les argumens ſpécieux de la Géométrie métaphyſique, ſi on ne dédaignoit pas ces abſtractions captieuſes, qui ne ſe prêtent à la vérité des démonſtrations que ſous la condition que les opérations ſont exactes, & qui ne peuvent que répandre des doutes ténébreux ſur cette condition; or ce qui ne ſe meſure pas déciſivement, ne doit pas être compris ſous le nom de *Géométrie*, quand même on pourroit y adapter l'emploi des calculs abſtraits; car

des quantités en nombre abſtraits ne ſont pas des meſures poſitives, ni des grandeurs bornées ; par exemple, on ſait par le calcul qu'un angle de l'Enéagone eſt de 40 dégrés; mais ſi on n'a pas géométriquement la meſure d'un dégré, on n'aura pas celle de cet angle de 40 dégrés.

PROBLÊME II. (*Pl.* II)

Trouver le rapport numérique de la Diagonale avec le côté du quarré.

1°. Soit le quarré A B C D & ſes deux diagonales B D & A C.

2°. De l'ouverture du compas D A, tracez l'arc A E C, qui porte la longueur du côté du quarré ſur la diagonale B D.

3°. Tracez de même l'arc ſemblable A F C.

4°. Diviſez en trois parties égales la diagonale B D renfermée en trois parties ſéparément dans trois cercles égaux dont les diamétres ſe trouveront diviſés, comme on le verra par la marche réguliere du compas, chacun en huit parties égales.

5°. De la même ouverture du compas;

qui a formé les trois cercles des trois parties de la diagonale B D, décrivez le cercle, qui a pour centre le point de ſection E, à l'extrêmité du côté du quarré placé ſur la diagonale B D.

6°. Décrivez le même cercle qui a pour centre le point de ſection F.

7°. Ces cinq cercles ſervent à diviſer réciproquement en parties égales la diagonale & le côté du quarré par une ſuite de cercles tous égaux, qui ſe croiſent de la circonférence au centre, & qui diviſent les diamétres communs en parties égales.

8°. Cet entrelaſſement de cercles égaux, qui ſe tiennenr tous par des points de réunion, forment la diviſion des diamètres des cercles, de la diagonale & du côté du quarré conjointement, de maniere que ces diviſions, qui ſont communes à l'une & à l'autre, peuvent ſe faire ſéparément & de la même maniere ſur l'une & ſur l'autre, par une meſure commune & déciſive par elle-même en toute rigueur géométrique.

DÉMONSTRATION.

1°. Le cercle, qui a ſon centre en E, à l'extrêmité du côté du quarré porté ſur la diagonale B D, & qui eſt déterminé par

cette extrêmité même ſans autres indices ni rencontres dépendantes de la meſure de la diagonale, eſt égal à chacun de tous les autres cercles qui meſurent le côté du quarré; ſon rayon E*e*, qui fait partie du côté du quarré, eſt diviſé en quatre parties égales par l'entrelaſſement des cercles égaux, qui ſe croiſent réciproquement de la circonférence au centre.

2°. Le cercle, qui a ſon centre en F, & qui eſt déterminé auſſi par le point de ſection de l'arc A F C, a ſon diamétre entier qui fait auſſi partie du côté du quarré poſé ſur la diagonale B D; ainſi, les huit diviſions du diamétre de ce même cercle peuvent être rapportées au côté du quarré en particulier, & reconnues pour communes ou pour égales à celle de la diagonale, qui eſt auſſi meſurée par des cercles égaux à ceux qui meſurent le côté du quarré & qui, par leur entrelaſſement réciproque, meſurent l'un & l'autre. Toutes ces diviſions diſtinctes, égales & communes, fixent la meſure numérique du côté du quarré à dix-ſept parties, & celle de la diagonale à vingt-quatre, toutes égales de part & d'autre, parce qu'elles ſont diviſées par des cercles égaux, qui ont tous réciproquement leur centre à la circonférence les uns des autres, & qui ſont une

mesure uniforme & commune au côté du quarré & à la diagonale.

Donc le rapport numérique, entre la totalité des quatre côtés du quarré & la diagonale, est comme 68 à 24, ou comme 17 à 6.

SCHOLIE.

Qu'est-ce qui m'assure, que le point de rencontre en E de l'extrêmité du côté du quarré avec le cercle R, est exactement un point de rencontre de réunion? C'est le rayon E *e* du cercle K qui est égal au rayon *eb* du cercle R, car ce sont deux rayons de deux cercles égaux, & divisés l'un & l'autre en quatre parties égales; donc le point de rencontre *e* est un point de rencontre de réunion; donc aussi le point de rencontre E avec le cercle R qui a son centre en *e*, est un point de rencontre de réunion; donc les divisions du côté du quarré & de la diagonale sont communes pour l'une & pour l'autre.

COROLLAIRE.

Application de ce rapport au quarré de l'Hypotenuse.

Multipliez le côté du quarré K, sou-

double du quarré Z & ſous-quadruple du quarré Y, 17 par 17, vous aurez 289; & la diagonale de ce même quarré K, 24 par 24, vous aurez 576. Le côté du quarré Y & la diagonale de ce même quarré Y ſont doubles du côté & de la diagonale du quarré K; ainſi, multipliez le côté du quarré Y, 34 par 34, vous aurez 1156 quadruple de 289. La diagonale du même quarré Y étant multipliée 48 par 48, comme double de la diagonale du quarré K, le produit ſera 2304, quadruple de 576.

Ces produits 1156 pour le côté du quarré Y, & 2304 pour la diagonale, ſe diviſent par moitié pour le quarré Z; car la diagonale de ce quarré eſt un côté du quarré Y; & la diagonale du quarré K eſt un côté du quarré Z; par conſéquent le quarré Y eſt double du quarré Z, & le quarré Z double du quarré K; auſſi le produit du quarré Y eſt-il double de celui du quarré Z, & quadruple de celui du quarré K. Mais le calcul du quarré Z n'a point de multiplicateur en nombres entiers, il faut y ſuppléer par les multiplicateurs du quarré K & du quarré Y qui ſont proportionnels au quarré Z. Cependant on peut auſſi, par le calcul, trouver le rapport numérique du quarré ſimple au

quarré double, pour avoir la meſure de leurs ſurfaces; mais pour éviter les racines ſourdes, il ne faut pas faire cette recherche par le rapport des côtés des quarrés. Le quarré double a un tiers de périmètre de plus que le quarré ſimple, & ce tiers eſt toujours équivalent à dix-ſept parties de la diagonale. Or ce tiers ne peut pas être partagé aux quatre côtés du quarré, ſans fractions irrationnelles; Ainſi il faut, dans la progreſſion d'un quarré à l'autre, ajouter dix-ſept, ſoit au multiplicateur, ſoit au multiplicande; mais à l'un ou à l'autre ſeulement. Le quarré ſimple ſe multiplie dix-ſept par dix-ſept: ainſi il faut multiplier le quarré double, trente-quatre par dix-ſept: on aura un produit double de celui du quarré ſimple. Le quarré double en ſurface, a un tiers en dedans ou quart en dehors, de moins de contours, que le quarré quadruple en ſurface. Il faut donc encore, pour ſuivre la même progreſſion, du quarré double au quarré quadruple, ajouter dix-ſept & multiplier par conſéquent trente-quatre par rtente-quatre, pour avoir un produit qui ſoit double de celui du quarré qui a été multiplié, trente-quatre par dix-ſept. Ainſi le produit du quarré Y ſera double de celui du quarré Z, & quadruple de celui du quarré

quarré K. Quelques Eleves en Géométrie diront peut-être, 34 multipliés par 17 ne forment pas un quarré ; mais on ne cherche pas ici à former un quarré par des chifres. Le quarré dont il s'agit est formé géométriquement, & géométriquement il est double du quarré K ; *son aire*, ou sa surface, doit contenir le double des parties égales, chacune à chacune, de celles de la surface du quarré K, & tout Calculateur qui ne peut pas les compter par le calcul, est en défaut lui ou son calcul ; car la Géométrie ne fléchit point vis-à-vis le calcul, comme il sera prouvé ailleurs.

PROBLÊME III.

Construire les Polygones primitifs.

PAR la division géométrique du cercle en 360 degrés, & le degré jusqu'à l'imperceptible, on peut faire tous les angles de Polygones primitifs ; parce qu'on pourra alors prendre sur le cercle le nombre de degrés, & les fractions que doivent avoir les arcs qui mesureront les angles des Polygones qu'on voudra construire. (*Voyez le Corollaire du premier Problême*).

Conſtruction des Polygones primitifs.
(*Pl.* III. *Fig.* I.)

Soit A B C D quart du cercle R.

Diviſez-le par moitié par la diamétrale *a* K.

Diviſez-le auſſi en trois parties égales par les lignes V *z* & V *r*, qui coupent par moitié les deux arcs A Q, & Q D.

Tirez par les points de ſection B, C du quart de cercle A B C D, la ligne O P, triple de B C.

Diviſez cette ligne O P en autant de parties égales que le Polygone que vous voulez conſtruire a de côtés; par exemple, ſi c'eſt un *Eptagone* ou Polygone de ſept côtés, on la diviſera en ſept parties.

Prenez une de ces ſept parties, portez-la de *b* en *r*, & tirez la ligne *v r e* parallele à la diamétrale *a* K, & qui coupera le quart de cercle en *v*.

Prenez la meſure *a v*, qui eſt la meſure de l'hypoténuſe de l'angle droit ſuppoſé *a b v*; portez-la quatre fois ſur la portion A 4 du cercle A B C D. Ces quatres parties donneront la meſure de l'arc A 4 de l'angle 4 X A, qui ſera un des angles de l'*Eptagone* que vous voulez inſcrire dans le cercle X.

DÉMONSTRATION.

I.

Tirez la ligne *b a*, triple de A 4, du point 4 au point *b*, décrivez l'arc *b t*, & du point A au point *a*, l'arc *a m*, les deux cordes A*m*, & 4 *t* feront égales à la corde de l'arc A 4. Continuez ainfi de fuite, vous aurez la divifion du cercle X en fept parties égales, qui feront les fept arcs des fept angles de l'*Eptagone*. Ceci n'eft qu'une démonftration fubféquente qui n'a pas fes rapports décififs dans la conftruction ; c'eft plus une fuite de conftruction, qu'une démonftration rigoureufe prife dans la conftruction, comme celle que l'on va donner, qui eft tellement comprife dans la conftruction par des rapports affurés, qu'elle tire fa certitude des mefures de la conftruction même.

I I.

Le rayon *x a* coupe à angle droit, & par moitié la corde de l'arc *v o*, cette moitié de la corde eft le finus de la moitié d'arc *a v*, ce finus forme un angle droit avec le rayon *x a*, ce rectangle eft fermé par l'arc *a v*, & la corde de cet arc eft l'hypoténufe

de ce même rectangle : l'hypoténuſe eſt plus longue que le ſinus, & toujours proportionnelle au ſinus ; ainſi, la longueur du ſinus de l'arc *a v* fixe toujours la longueur de la corde *a v* de cet arc *a v*, dont il falloit trouver la meſure. Or la longueur du ſinus eſt déterminée par la parallele *v r e* réglée par une ſeptième partie de la ligne *o p*, par laquelle on peut meſurer le ſinus, dont on a beſoin pour indiquer l'hypoténuſe *a v* du triangle rectangle *a b v* ; & c'eſt cette hypoténuſe, qui eſt la meſure de la diviſion en quatre parties de l'arc 4 A des triangles 4 X A de l'*Eptagone* ; ainſi l'on peut par un ſemblable procédé, trouver de même tous les autres Polygones primitifs ; ce qui eſt évident par la triſection connue du quart de cercle où le ſinus *b* B fixe en B le terme de l'hypoténuſe *a* B, qui eſt la corde d'un ſixième du quart de cercle D C B A, & par conſéquent la corde de la quatrième partie de l'arc d'un des triangles de l'exagone, qui ſe trouve démontrée ici par la même opération, qui a auſſi un rapport régulier avec l'échelle des trois quarrés Y, Z, K, (*fig.* 2).

Si la ligne *a d* eſt égale à *b o*, (*fig.* 1), la diagonale *q c* du quarré Z ſera égale à la proportionelle *ff* X, & la diagonale *c p* du

quarré K, ſera égale à la proportionelle œK. Ainſi, on a la meſure des deux proportionelles qui décident la ſolution du problême de la triſection de l'angle, comme on l'expliquera *Pl.* V, dans la réfutation de la prétendue impoſſibilité de cette triſection.

DISCUSSIONS GÉOMÉTRIQUES.

LA certitude des vérités géométriques eſt généralement reconnue.

Mais il y a différentes manières de comprendre les principes de cette certitude; parce que la théorie des connoiſſances s'eſt établie ſur deux baſes, qui induiſent à des raiſonnemens ſur leſquels les hommes ne s'accordent pas.

Les uns fixent la certitude à leurs *Apperceptions*; les autres veulent l'étendre juſqu'à la conception des abſtractions métaphyſiques, qui ſéparent abſolument les attributs qui conſtituent les êtres. Ceux-ci, en réaliſant idéalement ces abſtractions, croyent les comprendre avec évidence, & ſoutiennent que *ce qui eſt conçu*

clairement & distinctement est vrai; ceux-là disent que *ce que l'on n'apperçoit pas est inconnu*; parce que nous ne pouvons parvenir à la connoissance des choses, que par des sensations qui nous les indiquent, ou qui nous les représentent (*).

Voilà l'état de la question sur l'étendue & les limites des connoissances que nous pouvons acquérir avec certitude.

Quelles sont donc ces deux facultés, *appercevoir* & *concevoir*? Faut-il appercevoir pour concevoir, ou faut-il concevoir pour appercevoir? ou peut-on con-

---

* Nos sensations, qui sont, pour ainsi dire, les premiers élémens de notre pensée, peuvent se réduire à trois genres.

1°. Les sensations purement affectives, & qui ne représentent rien; telles sont les sensations de douleur, de plaisir, d'odeurs, de sons, de chaleur, de froideur, &c. Ce sont ces sensations, selon qu'elles sont agréables ou désagréables, qui forment les motifs qui déterminent notre volonté.

2°. Les sensations représentatives de grandeurs bornées, de formes de figures, &c. Ces sensations constituent nos idées ou images des objets que nous appercevons; elles nous font connoître & distinguer ces objets.

3°. Les sensations indicatives, lesquelles sont composées des deux genres de sensations précédentes; elles nous avertissent par les propriétés, par les effets, par les sensations affectives qu'elles nous causent, de l'existence des objets sans nous les faire connoître: un bruit, par exemple, que l'on entend au-dessus du plancher d'une chambre où l'on est, indique une cause qui a occasionné ce bruit; mais cette indication ne représente point la cause de ce bruit même.

cevoir ſans appercevoir, & appercevoir ſans concevoir ? Ces mots ont-ils dans le langage une ſignification bien claire & bien préciſe ; cela devroit être ſans doute, puiſqu'ils ſont les premières expreſſions de notre intelligence.

Les Géomètres diſent qu'ils conçoivent un point ſans étendue ; on conçoit donc ce qu'on ne peut pas appercevoir. Dans ce ſens, on concevroit ce que l'on ne peut pas comprendre. Ainſi, on concevroit ce qui eſt imperceptible & incompréhenſible. On dit que l'on peut penſer à la longueur d'une ligne ſans penſer ni à cette ligne, ni à ſa largeur ; c'eſt-à-dire, que l'on peut penſer à un attribut eſſentiel d'un ſujet, ſans penſer au ſujet ni aux autres attributs eſſentiels de ce même ſujet ; mais penſer à un attribut ſans penſer à l'autre, c'eſt oublier dans ce moment celui auquel on ne penſe pas : or, cet oubli ne laiſſe alors à l'eſprit qu'une idée incomplette d'un être & de ſes dépendances eſſentielles & réellement inſéparables. On ne peut donc pas les concevoir comme ſéparés lorſqu'on les oublie ; car on ne peut concevoir ſans penſer à ce que l'on conçoit, & on ne peut pas non plus concevoir diſtinctement une choſe lorſque l'idée de cette choſe ne ſe préſente pas

complettement à l'eſprit : on peut, il eſt vrai, y penſer ſans la comprendre avec ſes attributs conſtitutifs ; mais alors ce n'eſt pas la concevoir ; car il ne faut pas confondre la conception avec des penſées indéterminées, dénuées d'idées ou d'images. Qu'eſt-ce donc que concevoir ? Ce ſeroit, ſelon l'éthymologie du mot, réunir, raſſembler toutes les notions qui peuvent former l'idée complette d'une choſe que l'on veut connoître ; mais ici c'eſt tout l'oppoſé ; c'eſt abſtraire ou déſunir, & faire diſparoître le ſujet & ſa forme, pour ſe faire une idée dénuée de toute réalité ſur laquelle l'eſprit peut s'exercer ſans aucun aſſujettiſſement aux vérités poſitives, qui peuvent être connues avec évidence. Voilà où ſe réduit la ſignification du mot *conception*, employé par les Géomètres pour exprimer leurs abſtractions métaphyſiques, & pour militer contre l'évidence de la lumière naturelle, qui établit la certitude des connoiſſances humaines.

Ainſi, en croyant, ou en faiſant accroire que l'on conçoit les abſtractions métaphyſiques qui, dans le vrai, ne ſont ni perceptibles, ni concevables, on ne penſe pas que c'eſt attaquer la certitude de toutes les connoiſſances phyſiques ſur leſquelles les hommes règlent leur con-

duite & leurs actions pour leur sûreté & leur conservation. Les Sophistes ont nié par des raisonnemens abstraits l'existence des corps, du mouvement, &c. Les instructions qu'on alloit recevoir dans leurs Ecoles, consistoient dans une dialectique subtile & captieuse, par laquelle on pouvoit, en séparant les attributs des êtres, soutenir le pour & le contre, & répandre un doute universel sur les vérités qui constituent la raison humaine. Enfin la philosophie lumineuse s'est affranchie de ces abstractions insidieuses, & les plus fameux argumens du Pyrronisme sont tombés en dérision.

Ce n'est plus qu'en Géométrie où l'on trouve encore les traces de cette marche ténébreuse des anciennes Ecoles ; on y tient constamment à une petite théorie spécieuse qui élève l'esprit au-dessus des sens, & qui s'apprend en quelques minutes; quand on a dit un point sans étendue, une ligne sans largeur & sans profondeur, une surface sans épaisseur, des points de contact & de section , qui ne tiennent point de place dans le lieu où ils sont, & qui, sans être accessibles aux sens, doivent présider sur toutes les opérations de la Géométrie démonstrative ; tout est dit, & c'est dire en dernière analyse qu'il n'y a

à cet égard ni Géomètres ni Géométrie; car il n'y a là ni apperceptions, ni appercevans, ni apperçus, ni opérations décisives, &c. Les calculs sublimes qui se prettent, autant que l'on veut, aux perceptions intellectuelles, ne peuvent cependant y suppléer; car pour compter ou calculer des mesures, il faut des termes connus. Si au contraire la Géométrie démonstrative est reléguée dans l'imperceptible, elle est anéantie, & ne laisse que des doutes qui sont étrangers, & qui heurtent le bon sens & révoltent la raison.

Cependant il y a une Géométrie démonstrative, une science des grandeurs, des Géomètres qui en démontrent les vérités, des points réels sensibles, des lignes visibles qui s'approchent, qui se touchent, qui se confondent, qui se croisent, qui ont leur place marquée, & qui nous retiennent rigoureusement dans les bornes du *cognoscible*.

Mais lorsqu'on répand un peu de Géométrie métaphysique sur ces vérités connues, on les obscurcit au point qu'on n'y reconnoît plus ni exactitude, ni certitude décisives. Ces spéculations sublimes & idéales ne peuvent être regardées que comme un badinage d'esprit; car il faut,

pour l'usage des hommes, une science de mesurer, respectable par son utilité & par sa certitude; mais cette science a besoin d'être délivrée d'une fausse théorie qui la dégrade, & qui en arrête les progrès. Elle s'est fixée principalement aux lignes tangentes, à l'arc immergé dans une rectiligne, & aux points de rencontre indéterminés; il faut pénétrer dans ces réduits obscurs pour démêler les vérités positives d'avec les notions idéales qui les enveloppent & les assujettissent à des erreurs mystérieuses & imposantes.

De la Ligne tangente, & de l'Arc immergé dans une Ligne droite. (Pl. IV).

La ligne tangente métaphysique est une ligne droite supposée sans largeur, qui baise en un point une ligne circulaire, supposée aussi sans largeur, & de là le point de contact avec sa tangente est appellé *point d'osculation;* parce que ce point est supposé ne porter ni sur l'une ni sur l'autre ligne; ce qui se réduit à une fiction absurde dans l'ordre inaccessible aux sens, parce que le prétendu contact de ces deux lignes ne peut être assujetti à aucune évidence, ni à aucune preuve qui en démontre la certitude. Ainsi, il n'y a là que

des ſuppoſitions ſur leſquelles on ne peut aſſeoir aucun jugement : auſſi, dans les opérations effectives de la Géométrie, faut-il ſe repréſenter ce point de contact par la rencontre d'une ligne droite ſenſible QX, & d'une ligne circulaire ſenſible ABD, tracées ſelon des règles preſcrites par la Géométrie démonſtrative ; mais alors chacune de ces lignes a ſa largeur, &c. l'une & l'autre ſe réuniſſent à leur rencontre en A, ſe pénètrent réciproquement, de façon que la ligne droite couvre plus de deux dégrés de la ligne circulaire, ce qui ne peut plus ſe concilier avec le prétendu point d'oſculation de la ligne droite, que l'on ſuppoſe toucher extérieurement en A la circulaire à l'extrémité du rayon AO. Si j'obſerve idéalement que ces deux lignes, qui ont l'une & l'autre une largeur, ont auſſi l'une & l'autre deux bords ; cette obſervation m'indique alors pluſieurs remarques à faire, qui peuvent ſervir à débrouiller ce petit cahos.

Les largeurs de ces lignes ſont confondues enſemble dans tout le trajet de leur immerſion réciproque ; ainſi, je conçois que le bord extérieur de la ligne droite *ll* peut raſer du même côté le bord de la circulaire au ſommet de l'arc en A,

où le rayon AO coupe par moitié l'arc & ſa corde ; & je conçois auſſi que le bord intérieur de la ligne *ll* ſera la corde de l'arc *l*A*l*.

Mais il faut alors que j'abandonne l'idée du point d'oſculation d'une ligne droite ſans largeur, qui baiſe extérieurement une ligne circulaire auſſi ſans largeur ; car les lignes géométriques dont il s'agit ſont dans la réalité d'une autre nature, & dans une autre poſition que ces prétendues lignes ſans largeur, dont la poſition, ni leur contact idéal, ne peuvent être établis par aucune opération géométrique, & dont on ne peut avoir que des idées factices & indéterminées, qui ne peuvent être d'aucun uſage dans la ſcience de meſurer. Ainſi au lieu d'un point d'oſculation de deux lignes, je conçois néceſſairement deux points réunis bord à bord, & une immerſion réciproque de deux lignes géométriques qui ſe confondent enſemble dans l'étendue de plus de deux degrés de cercle, où l'arc de ces deux degrés de la circulaire n'a de courbure que celle qui chemine dans la largeur de la ligne droite *ll* dans laquelle cet arc eſt immergé.

Or, ſi l'immerſion *ll* de ces deux lignes géométriques étoit totale dans toute ſon

étendue *ll*, la courbure de l'arc immergé feroit entièrement comprife dans la largeur de fa corde, dans toute l'étendue de l'immerfion réciproque de ces deux lignes, & la corde de l'arc feroit elle-même, dans tout le trajet de l'immerfion, la tangente géométrique de l'arc, & auffi la corde géométrique de cet arc. Ainfi il faudroit reconnoître alors que la tangente & l'arc feroient confondues enfemble dans une grande étendue, ce qui impliqueroit contradiction dans les idées d'arc & de tangente ; auffi ne peut-on pas concevoir une immerfion totale de l'arc & de fa corde dans une plus grande étendue que celle d'un point géométrique ; car une ligne circulaire géométrique ne peut s'immerger que graduellement dans une ligne droite géométrique, jufqu'à ce que l'une & l'autre fe trouvent complettement réunies en un feul point géométrique.

Mais encore eft-il évident que ce point & ces lignes géométriques, qui ont une largeur réelle, doivent fe rencontrer & s'immerger en plein en un feul point géométrique commun, parce que l'opération géométrique, qui les établit, les affujettit néceffairement à cette immerfion totale en un point commun géométrique, & que dans tout le refte du trajet de l'im-

mersion, elle les fait rapprocher de plus en plus de cette immersion totale en un point géométrique commun à l'arc, à la corde, & à la tangente géométrique.

Ainsi on ne pourroit, par toute autre manière d'envisager ces rapports, que se former des idées de mesures indéterminées & indéterminables, incompatibles avec la science de mesurer.

Donc en parlant géométriquement, il y a dans les rapports d'immersion un point géométrique de réunion en plein, & des points géométriques de rapprochemens à différens degrés, qui cependant sont tous compris dans la ligne géométrique d'immersion; en sorte que tous ces points d'approchemens pris chacun séparément, peuvent, dans les cas où ils correspondent à d'autres points invariables dans les grandes & petites mesures, équivaloir à des points de réunion, & fournir pour les mesures des rapports décisifs, comme on le prouvera ci-après, & comme il sera expliqué & prouvé encore dans la théorie de la quadrature du cercle, où les mesures exigent la plus grande précision, pour prouver des rapports assurés, outre la ligne droite & la ligne circulaire, & où les abstractions métaphysiques ont toujours dérouté la Géométrie; car les *idées méta-*

physiques ne sont que des idées physiques indéterminées, qui excluent toute évidence de précision réelle ; par exemple, je n'ai qu'une idée incomplette d'une ligne, quand je pense à sa longueur sans penser à sa largeur ; & si je prends une dimension de la ligne pour la ligne même, mon oubli est une erreur qui ne change rien dans le physique de la ligne. On doit donc, pour revenir ici à une précision physique évidente, envisager tout ensemble la ligne tangente, le rayon, l'arc & sa corde réduits au point A, dans le plus petit espace perceptible possible, où leurs mesures sont portées à la plus grande exactitude à laquelle nous pouvons parvenir, & qui est pour nous le dernier terme de l'évidence géométrique, mais qui nous suffit pour juger de la certitude des mesures que nous voulons connoître ; car celles qu'on prétend rapporter aux abstractions métaphysiques, ne sont pas des mesures, puisque ces abstractions excluent tout objet mesurable, & ne présentent que des impossibilités qui arrêtent les progrès de la Géométrie.



Du point de rencontre indéterminé.

L'idée abſtraite du point ſans étendue, & des lignes ſans largeur, a obſcurci toute la théorie des points compliqués & de l'immerſion réciproque des lignes géométriques; on croit, par exemple, que les deux circonférences ſenſibles des cercles excentriques, dont l'un a ſon point central en O, & l'autre en *g* [*Pl.* IV.] & leur point commun de réunion en grand C; on croit, dis-je, que les circonférences de ces cercles, qui s'approchent de plus en plus l'une de l'autre vers grand C, ne ſe touchent pas avant que d'y arriver, & qu'il y a entre elles une ſéparation imperceptible & un approchement graduel juſqu'à leur point commun grand C : cependant ſi l'on trace en rouge la circonférence du cercle, qui a ſon centre en O, & ſi l'on trace en noir celle du cercle qui a ſon centre en *g*, on voit qu'à meſure que celle-ci approche du point C, le noir couvre de plus en plus l'autre circonférence qui eſt en rouge; de façon que proche le point C, le bord du rouge devient imperceptible & diſparoît entierement, avant que les circonférences ſe trouvent au point commun C.

Si les lignes circulaires ſont conſidérées phyſiquement, on ſera forcé de reconnoître deux vérités qui ne ſe manifeſtent pas au premier aſpect.

1°. Que l'immerſion réciproque de ces deux lignes doit commencer fort loin du point de réunion C, & s'accroître de plus en plus à meſure qu'elle approche de ce point, parce qu'il eſt phyſiquement impoſſible que cette immerſion puiſſe devenir totale en C, ſans s'accroître graduellement à meſure qu'elle en approche.

2°. Que les deux bords de chacune de ces lignes ne peuvent être compris complettement dans l'immerſion, qu'au point de réunion C, & que les bords imperceptibles qui reſtent à découvert diminuent continuellement & à l'infini juſqu'à ce point; de ſorte que, proche du point de réunion, ils ne peuvent plus être exceptés de l'immerſion dans les opérations de la Géométrie démonſtrative, parce qu'ils ne peuvent plus être ſaiſis par les ſens; cependant on peut, dans la rencontre de ces lignes, diſtinguer intellectuellement le point de réunion d'avec les points d'approchement de différens dégrés imperceptibles. Mais cette diſtinction eſt nulle dans les démonſtrations de la Géométrie, tant que ces points d'approchement ſont aſſujet-

tis invariablement, dans les opérations, à des conditions assurées, où ils ne peuvent se séparer ni s'éloigner en aucun cas, soumis à ces mêmes conditions, qui rendent ces points de rencontre d'approchement équivalens à des points de rencontre de réunion. Ce que l'on dit de deux lignes qui se rencontrent doit s'entendre de même de la rencontre de deux points plus ou moins immergés réciproquement l'un dans l'autre, & à tel degré qu'ils ne forment ensemble qu'un seul point sensible.

Si du point *g* pour centre au point petit *c*, je trace l'arc petit *c* & grand C, il sera le même que si je le traçois à contresens de grand C en petit *c*, parce que, dans l'un & l'autre cas, la pointe de mon compas couvre totalement les deux lignes confondues en une seule ligne sensible, en grand C & en petit *c* : ainsi, dans cet exemple, le point d'approchement en petit *c*, & le point de réunion en grand C sont équivalens pour mesurer l'angle isoscele *gc* C par l'arc C *c*. Cependant la Géométrie métaphysique décidera que le côté *g* grand C est plus petit que le côté *g* petit *c*, parce que le point petit *c*, qui est à la circonférence du cercle extérieur, est intellectuellement plus éloigné de *g* que le point grand C, qui est le point de réunion de la circonfé-

rence du cercle intérieur avec celle de l'extérieur.

C'eſt ainſi qu'il y a preſque toujours diſcordance entre la Géométrie métaphyſique & la Géométrie démonſtrative, & que les Géomètres ont toujours prononcé en faveur des vérités intellectuelles, au préjudice des vérités poſitives fixées par la Géométrie démonſtrative ; on ne doit donc point s'étonner de ce que les progrès de la Science de meſurer aient été arrêtés par les fauſſes applications de la Géométrie des imperceptibles à la Géométrie ſenſible, & de ce que la théorie du point de rencontre ſoit reſtée enveloppée dans l'incertitude de cette marche ténébreuſe.

J'ai dit que, dans les points de rencontre, les points confondus en un ſeul point ſenſible, ſont toujours équivalens au point de réunion, tant qu'ils ſont aſſujettis invariablement, dans les grandes figures comme dans les petites, aux mêmes conditions dans les opérations de la Géométrie démonſtrative ; car tant que le point *g* ſera auſſi près du point O, & que le point petit *c* ſera auſſi près du point grand C, le point d'approchement de la circonférence du cercle intérieur & le point d'approchement de la circonférence du cercle extérieur, ne formeront enſemble qu'un ſeul

point ſenſible, que la pointe du compas couvrira entierement dans les opérations géométriques, ſoit dans les grandes, ſoit dans les petites meſures, où l'opération ſera toujours, à l'égard de ces mêmes points, aſſujettie invariablement aux mêmes meſures conſidérées abſolument & non pas proportionnellement à la grandeur des figures.

Si, dans d'autres meſures où la conſtruction peut varier, le point *g* ſe trouvoit plus éloigné du point O, ou bien le point petit *c* plus éloigné du point grand C, alors le point de rencontre, qui, dans une petite meſure priſe par tâtonnement, ne ſeroit qu'un ſeul point ſenſible, pourroit, dans une plus grande meſure, n'être plus un point de rencontre; mais des points ſéparés, & peut-être même fort éloignés les uns des autres : or ce n'eſt que dans ce cas où le point de rencontre doit être ſuſpect dans les démonſtrations géométriques; mais ce cas ne peut arriver que par un changement conſidérable dans la conſtruction, ou dans une conſtruction défectueuſe qui peut être réduite à l'abſurde; car l'erreur ne vient jamais du point de rencontre; & dans une bonne conſtruction, il eſt toujours dans le chemin de la démonſtration. Mais encore peut-on juger par la ſtabilité

ou l'inſtabilité de l'enſemble de la conſtruction, ſi la disjonction d'un point de rencontre eſt poſſible ou impoſſible.

Le point *p* eſt le centre d'un cercle excentrique au cercle qui a pour centre le point O, & au cercle qui a pour centre le point *g*; mais le centre *p* eſt ſi éloigné du centre O & du centre *g*, que l'on doit reconnoître que la circonférence du cercle qui a ſon centre en *p*, & qui a *p*C pour rayon, ne rencontrera pas en petit *c* les circonférences des deux autres cercles en *c*; mais on ſera très-aſſuré qu'il les rencontrera fort près du point grand C, & que le point d'approchement en cet endroit ſera équivalent, dans une démonſtration, à un point de réunion : il en eſt de même ſi les points C *c*, & O *g*, & *m a* ſont auſſi proches, ou s'ils ſont plus proches l'un de l'autre dans les meſures plus ou moins grandes.

Il ne peut y avoir à cet égard aucun doute, lorſque le point de rencontre renferme le point d'approchement & le point de réunion, & que leurs rapports avec leurs points correlatifs reſtent invariablement les mêmes dans les grandes comme dans les petites meſures; car le point d'approchement & le point de réunion ne pourront jamais ſe ſéparer, parce qu'ils ſont aſſujettis au même point par leurs correlatifs.

Alors le point de rencontre qui, avec toutes ces conditions requiſes, renfermera le point de réunion & le point d'approchement, alors, dis-je, ce point commun ſera toujours un point démonſtratif. Il faut donc enviſager tout enſemble le point de rencontre & ſes points correlatifs, pour ne pas accuſer fauſſement de paralogiſme un point de rencontre; cependant rien n'eſt plus commun que cette imputation, & rien n'eſt plus rare que l'erreur du paralogiſme dans un point de rencontre, qui renferme bien démonſtrativement le point de réunion & le point d'approchement : alors c'eſt ſouvent le Juge qui eſt dans l'erreur, & c'eſt ſa Géométrie métaphyſique, qui ne reconnoît point l'évidence des vérités poſitives, qui l'égare, & qui en impoſe auſſi à l'Auteur de la démonſtration par l'authenticité que ce genre de déciſion a acquiſe parmi le commun des Géomètres.

Le diamètre *m n* du cercle intérieur qui a ſon centre en *g*, rencontre en O le centre du cercle extérieur, & ce point de rencontre O, qui ne forme qu'un ſeul point ſenſible, renferme le point réel d'approchement du diamètre *m n* du cercle intérieur, & le point réel de réunion du diamètre AC. Si de ce point de rencontre O au point petit *c*, qui eſt un autre point

d'approchement, on décrit un cercle, ce cercle ſera le même que le cercle ABCD; c'eſt-à-dire, en ſuperpoſition ſur ce même cercle, dans toute ſon étendue : cette ſuperpoſition totale ſur un cercle ou ſur une ligne appartenante à une conſtruction, m'aſſurera par-tout, qu'en pareille conſtruction, ce cercle ou cette ligne ſeront les mêmes que leurs ſuperpoſés, qui s'y ajuſteront exactement dans toute l'étendue de leur trajet quel qu'il ſoit; ce qui peut ſervir à déterminer l'union des points de rencontre qui ne ſont pas ſuſceptibles de ſéparation, tant qu'ils ſeront aſſujettis, par la conſtruction, à des conditions déciſives & invariables; c'eſt-à-dire, tant que les diſtances C *c* & *m a*, par exemple, reſteront toujours les mêmes; alors les chicanes de la Géométrie métaphyſique attaqueront en vain ces vérités poſitives de la Géométrie démonſtrative : autrement il faut renoncer à cette Science pour ſe perdre dans la Géométrie des imperceptibles dont la prétendue exactitude, qui n'eſt ſuſceptible d'aucune démonſtration, anéantit toute certitude. La pierre de touche de la futilité de toutes ces chicanes fallacieuſes, eſt de montrer qu'on peut les étendre à toutes les démonſtrations les plus décidées des élémens de la Géométrie, &

qu'elles répandront un doute général sur toutes les vérités positives de la Science de mesurer.

EXEMPLE.

La ligne B D est un diamètre du cercle ABCD, parce qu'elle rencontre dans son trajet le point central O; mais on peut contester cette assertion par la Géométrie métaphysique; on contestera même qu'il soit possible d'établir sûrement un tel diamètre dans un cercle; car il faudroit prouver que l'opération a saisi précisément cinq points mathématiques imperceptibles : or l'imperceptibilité de ces points exclut toute évidence & toute démonstration : donc on ne peut pas affirmer que la ligne BD soit un diamètre du cercle ABCD qui coupe à angle droit le diamètre A C : donc cette ignorance ou incertitude de la Géométrie des imperceptibles peut attaquer par-tout l'évidence des vérités positives de la Géométrie démonstrative. A l'appuy de ces incertitudes vient le quarré de l'hypoténuse, où un calcul imposant joue le plus grand rôle pour démentir les vérités les plus simples & les plus évidentes de la Géométrie naturelle. (*Voyez les élémens de Géométrie de M.*

Clairaut, page 94 & ſuivantes.) Pour ſe rapprocher de la vérité qu'on ne peut pas éluder dans les démonſtrations, on a cherché à maſquer l'erreur du calcul par le calcul même, en étendant ſi loin les diviſions des meſures, que dans chaque partie les excédens ſoient ſi petits qu'ils puiſſent être réputés pour rien. Mais, ſi l'on fait attention que, dans les grands calculs, la ſomme totale des petits excédens ne forme pas un petit excédent, on reconnoîtra l'illuſion de ce ſubterfuge; car, par cet uſage arbitraire du calcul des infiniment petits, on changeroit le nombre des parties proportionnelles des ſurfaces de différente grandeur; ainſi les grandeurs naturelles des parties changeroient à la volonté du Calculateur; cet abus du calcul, qui anéantit les infiniment petits, ne ſeroit pas recevable dans les partages, puiſqu'il anéantiroit toute grandeur diviſée à l'infini; au lieu qu'en Géométrie on reconnoît toujours, par exemple, que le diamètre commun de pluſieurs cercles concentriques, indique une diviſion intellectuelle qui eſt en même raiſon pour les plus grands cercles & pour les plus petits, & qu'à l'égard de l'exactitude rigoureuſe de la diviſion technique, elle dépend de l'habileté de l'Artiſte; mais ce ſont les condi-

tions sous - entendues qui décident.

Le calcul n'est pas un moyen suffisant pour trouver & démontrer les mesures géométriques ; il ne peut servir qu'à les compter lorsqu'elles sont trouvées, & il ne s'ajuste aux mesures des surfaces des quarrés, que par des nombres multiples, ou bien par des nombres réversibles qui suppléent aux nombres multiples ; tel est, par exemple, le nombre 1156, qui se partage régulièrement aux mesures géométriques de l'échelle des trois quarrés Y, Z, K (*Pl.* II. *Fig.* 2), & qui s'ajuste aux rapports de leurs côtés avec leurs diagonales. Les nombres multiples manquent souvent dans les calculs : alors ils conduisent à des lacunes qu'ils ne peuvent remplir. Si, par exemple, le produit d'une mesure de surface quarrée doit être 578, le nombre multiple le plus proche ne donnera que 576 ; car le nombre 578 n'a point de multiplicateur en nombres quarrés : mais si on multiplie les côtés du quarré quadruple 34 par 34, on aura 1156, qui, divisés par moitié, donneront 578 pour le quarré double Z établi sur la diagonale du quarré sous-quadruple K, & dont il faut suppléer le multiplicateur qui lui manque par le multiplicateur du quarré quadruple Y ; car c'est ce multiplicateur, qui manque,

qui a fait naître le paralogiſme qui décide une incommenſurabilité de rapports de ſurfaces quarrées. Cette inſuffiſance des calculs multiples, quoique bien connue, a paru avoir ſon principe dans les objets mêmes dont les meſures échappent au calcul, & on a cru décidemment qu'ils ſont géométriquement incommenſurables, parce qu'ils ſont incalculables. En effet, on s'eſt fixé conſtamment à cette déciſion à l'égard du rapport de la diagonale avec le côté du quarré, & à l'égard de deux quarrés dont l'un eſt établi ſur la diagonale de l'autre, & l'on en a tiré des conſéquences qui contrarient l'évidence la plus lumineuſe en Géométrie. Cependant le côté du quarré K, & le côté du quarré Y ont une moyenne proportionnelle qui leur eſt commune, comme on l'a vu ci-devant Corol. du Probl. II. & qui donne un calcul conforme aux meſures géométriques de l'échelle des trois quarrés K, Z, Y.

Néanmoins on a conclu que *l'addition des figures ſemblables eſt une preuve déciſive de la néceſſité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une manière qui puiſſe ſe démontrer rigoureuſement.* Il eſt vrai qu'il s'agit ici de démonſtrations qu'on prétend établir par le calcul, & qui doivent l'emporter ſur l'évidence

des démonſtrations de la Géométrie démonſtrative ; mais, ſi c'eſt ainſi qu'on l'entend, il faut qu'on nous faſſe connoître où eſt cette évidence ſupérieure des démonſtrations attribuées au calcul appliqué à la Géométrie démonſtrative ; celle-ci doit elle-même, indépendamment du calcul, trouver & démontrer évidemment ce qu'on prétendroit trouver & démontrer par le calcul qui, dans ſon application à la Géométrie, ne peut avoir d'autre évidence que celle des meſures Géométriques auxquelles il eſt aſſujetti pour compter ces meſures, & non pour les trouver & les démontrer : en effet, ce n'eſt qu'autant qu'il peut s'y ajuſter, qu'on doit juger de l'exactitude de ſon application en Géométrie, où ces mêmes meſures ſont déja démontrées évidemment. Tout le fond de la Géométrie calculatrice & de la Géométrie démonſtrative ſe rapporte au triangle. Or, il faut former les triangles & meſurer leurs différentes formes d'étendue, avant que de les calculer par leurs baſes & par leurs hauteurs. Il faut donc alors reconnoître les points ſenſibles des ſommets des angles, ſans leſquels on ne peut calculer les triangles. Auſſi à cet égard les points ſenſibles ſont-ils admis dans la Géométrie calculatrice & dans la Géométrie démonſtrative,

comme la baſe de tout calcul & de toute meſure déterminable. En Géométrie, il ne faut pas ſeulement penſer vaguement à l'objet qu'il faut meſurer avec évidence; car l'évidence doit préſider à toutes les meſures, & au-delà de l'évidence elles ſont indéterminables. Ainſi, *tout raiſonnement géométrique, ſans évidence ſur les meſures, ne conduit qu'à des ſpéculations inutiles relativement à la Géometrie poſitive*; car c'eſt l'évidence qui conſtitue la Géométrie poſitive : elle eſt la loi ſuprême à laquelle elle doit toujours être aſſujettie, parce que la ſcience de meſurer ne doit pas être une ſcience d'opinion, car les opinions ne ſe meſurent point; ainſi elle ne peut être une ſcience métaphyſique, car les notions ou perceptions métaphyſiques ne ſe meſurent pas non plus; mais on peut les compter; ce qui prouve que compter n'eſt pas meſurer.

Il ne faut donc pas confondre *calculer* avec *meſurer*, ni rejetter par abſtraction le point ſenſible, & l'admettre dans la réalité; c'eſt livrer une ſcience à un langage équivoque & à une *Logomachie* ridicule. Donc, ſi les fauſſes applications de calculs, & les abſtractions logiques, métaphyſiques, &c. dominoient dans la ſcience de meſurer, il faudroit ſe détacher entièrement

de la Géométrie démonſtrative, qui eſt la ſeule Géométrie réelle, la ſeule qui ſoit digne d'être placée au rang des Sciences lumineuſes & néceſſaires.

Il eſt donc eſſentiel de démêler les vérités poſitives évidentes de la Géométrie démonſtrative d'avec les ſuppoſitions de la Géométrie des imperceptibles, & d'avec les ſpéculations myſtérieuſes & les fauſſes applications des calculs abſtraits, qui embrouillent tellement la théorie de la Géométrie démonſtrative, qu'elle ne peut pas, dans cet état ténébreux, former une véritable Science.

Mais l'évidence eſt trop impérieuſe; elle maîtriſe ſi ſouverainement l'eſprit de quiconque l'apperçoit manifeſtement, qu'il ne peut être ſubjugué par l'erreur qui contredit la certitude des vérités ſenſibles de la Géométrie démonſtrative; ainſi, il doit arriver que l'évidence y dominera ſi déciſivement, qu'elle élevera cette Science au plus haut dégré de clarté, de ſimplicité & & de facilité où toutes ſes opérations pourront être démontrées ſans renvois & ſans complications embarraſſantes, par les ſeules meſures d'évidence primitive. Alors ſon étude pourra être très-utile aux jeunes gens pour aſſujettir l'eſprit à la préciſion, & former le jugement dans la recherche de la vérité.

DIVERSES CONSTRUCTIONS & démonſtrations de la Triſection de l'Angle.

CONSTRUCTION. (Pl. V).

Soit A E D, l'angle propoſé pour être diviſé en trois parties égales. A B C D eſt l'arc qui le meſure. P K, la diamétrale qui le diviſe en deux parties égales. A D la corde de l'arc A B C D.

1°. Du point E pour centre au point A, achevez le cercle X de l'arc A B C D. Tirez ſon diamètre G I.

2°. Du point *t* pour centre au point E, décrivez le cercle Z, tirez ſa tangente M N.

3°. Prenez la meſure de la corde A D, portez-la de K en M, & de K en N; du point M au point A, tirez la ligne M A, prolongée vers *b*, & de N en D, la ligne N D prolongée vers *c*.

4°. Prenez la meſure E G, portez-la de M en H, & de N en L, tirez la ligne H E prolongée en *c*, où elle ſe réunit à la ligne N *c*; tirez de même la ligne L E prolongée en *b*, où elle ſe réunit à la ligne M *b*.

De

De A en E, décrivez l'arc E *rb* ; tirez la ligne *b* C.

Du point W au point E, décrivez le demi cercle E *ff* O Z.

Du point *v* au point E, ſon ſemblable E *ſ* F Z.

Du point C au point Y, tirez la ligne C Y parallele à B X.

Du point Z au point D, tirez la ligne Z D prolongée en R, & parallele à *c* F.

Du point D au point E, décrivez l'arc *c r* E, tirez la ligne *c* B.

Vous aurez le lozange E D *c* B, faites ſon ſemblable E C *b* A ; décrivez les deux cercles P, Q & leurs ſemblables R, S.

Cette conſtruction ne s'étend guères plus qu'à un arc de 90 degrés, ſi l'arc d'un angle donné étoit plus grand, on le diviſeroit par moitié, & on établiroit la conſtruction ſur cette moitié ; ce qui reviendroit au même : car les meſures d'une moitié étant doublées, elles réuniſſent celles de l'autre moitié ; c'eſt pourquoi, tout angle obtus peut être ſuppléé en géométrie par un angle aigu.

DÉMONSTRATION.

I.

L'arc A C, compris entre les deux pa-

ralleles AM & CH, eſt égal à l'arc DB; compris entre les deux paralleles BL & DN, & égal à F*f* & à XO ; il s'agit de prouver que ces deux arcs AC & DB ſont coupés par moitié en B & en C par les lignes CF & BX ; car l'arc total ABCD ſera diviſé en trois parties égales.

La baſe XF du triangle FEX eſt double de celle du triangle BEC, parce que les côtés EX & EF du triangle FEX ſont doubles des côtés EC & EB de l'angle CEB oppoſé au ſommet de l'angle EXF ; donc l'arc ZF du triangle EZF, eſt égal à l'arc CB.

Donc il eſt déjà évident que l'arc XKF eſt égal à l'arc DB, & eſt égal auſſi à l'arc CA, & que l'un & l'autre ſont coupés par moitié en B & en C par les lignes BX & CF ; ce qu'il falloit démontrer. Développons cette démonſtration, pour la rendre plus ſenſible à ceux qui ſont offuſqués par le préjugé.

L'arc XKF eſt égal à l'arc DCB ; la moitié KF de l'arc XKF eſt égale à l'arc CB, donc CB eſt la moitié de DCB : cela peut être rendu très-viſible, pour ménager le travail de l'eſprit.

L'arc CB eſt compris entre les deux paralleles BX & CY ; donc il eſt égal à XZ, compris de même dans le cercle R.

L'arc DC eſt compris entre les deux paralleles DZ & CF, or ces paralleles DZ, CF, & BX, CY, ſont à la même diſtance de E *y*, de YX, de XZ & de ZF.

Donc l'arc D C B eſt coupé par moitié en C par la ligne C F, parallele à D Z, & par la ligne C Y, parallele à B X; toutes paralleles à égale diſtance les unes des autres.

On peut encore remarquer que les angles A *b* C, & A E C, B *c* D & BED ſont tous égaux, & forment les deux lozanges égaux *b* A E C & *c* B E D, qui ſe croiſent par moitié; donc les portions d'arc A C & B D ſont égales; or ces portions ſont coupées par moitié en B & en C par les deux diagonales *b* E & *c* E; donc les trois parties de l'arc A B, B C, & C D ſont égales; donc l'angle donné AED & ſon arc ABCD ſont diviſés en trois parties égales par les deux lignes B L & C H. Ce qui ſe trouve prouvé par ſurabondance, & démontré évidemment par la ſeule inſpection des meſures requiſes par la conſtruction.

Ainſi, un arc occupé en entier par deux angles égaux qui ſe croiſent réciproquement par moitié, eſt diviſé en trois parties égales par les diamétrales de ces deux angles.

SCHOLIE.

Pourquoi dites-vous, que les côtés du quadrilatère E A *b* C ſont égaux? C'eſt que, par la conſtruction A *b* eſt égal à A E qui eſt égal à C E, parce que C E & A E ſont rayons de l'arc C B A, ainſi C E & A *b* ſont deux paralleles de même longueur, donc C *b* & A E ſont auſſi deux paralleles de même longueur.

Pourquoi dites-vous, que C E & *b* A ſont deux paralleles? C'eſt que par la conſtruction, l'éloignement des lignes M *b* & H *c* eſt meſuré par les lignes E I & H M qui ſont égales.

Toute la démonſtration conſiſte à prouver, que la portion d'arc D B eſt coupée par moitié par la ligne C E ou ce qui eſt égal par la ligne C *j* qui eſt parallele à B E, & qui coupe par moitié l'arc O X qui eſt égal & ſemblable à l'arc D B; donc cet arc D B eſt auſſi coupé par la moitié par la ligne C Y.

DÉMONSTRATION générale de la triſection de l'Angle.

Soit l'angle donné AED diviſé par ſon arc, par une conſtruction quelconque, en trois parties égales A B & B C & C D.

Du point C pour centre, au point B; & du point B pour centre, au point C, décrivez les deux cercles Q & P; tirez leur diamétrale R *z*, qui passera en C & B.

Ce diametre commun sera divisé en trois parties égales à chacune des trois divisions de l'arc, si la division de cet arc est bien faite par la construction; ce qui sera prouvé par la division de la ligne D *y* en trois parties égales aux trois parties de la diamétrale.

Prenez la mesure du diametre commun des deux cercles Q, P; portez-la de D en *y* sur la corde de l'arc D C B A prolongée vers *y*.

Prenez la mesure d'une des divisions du diametre R *z*, portez-la de *y* en *x*; tirez les lignes B *x* & *z y*.

La ligne C *q* sera parallele à B *x* & à *z y*, & la ligne D *q* sera égale à une des divisions du diametre R *z*, & à chacune des divisions de l'arc A B C D.

Donc l'angle donné sera divisé au tiers par le rayon C E.



DE LA PRETENDUE DEMONSTRATION de l'impossibilité de la Trisection de l'Angle (Pl. V).

« On ne peut résoudre, dit-on, (*Elé-
» mens de Géométrie du P. Lamy*, pag. 311)
» avec la règle & le compas, les Problê-
» mes solides *.

« Les équations solides ou de trois di-
» mensions, se réduisent dans une progres-
» sion de quatre termes; mais outre que
» cela ne peut expliquer en peu de paro-
» les, pour connoître ce que l'on cherche
» dans une semblable progression, il faut
» trouver deux moyennes proportionnel-
» les entre deux termes, ce que l'on ne
» peut faire que méchaniquement avec les
» lignes droites & les cercles, ainsi qu'on
» l'a vu liv. 3, § 1. Ce qui peut arriver dans
» les Problêmes qui ne regardent que les
» lignes droites & les cercles, comme
» dans ce Problême si fameux de la trisec-
» tion de l'angle, qu'on ne peut résoudre
» que par l'analyse; où l'on vient à une
» équation de trois dimensions, ce qui
» montre que ce Problême est solide ».

* Cette Proposition est d'Hypocrate de Chio.

« Ces Problêmes ſolides ſe réſolvent fa-
» cilement par des moyens méchaniques,
» comme celui de la triſection de l'angle
» *p* E D qu'il faut couper en trois. Je pro-
» longe vers K le diamètre P *t*, & ſur le
» prolongement de *p t*, je cherche le point
» W dans le cercle, tel que E W ſoit
» égal à W Z, ce que je trouve en tâton-
» nant comme l'on dit. L'arc *t* W ſera le
» tiers de *p* D, & ainſi W E *t* ſera le tiers
» de l'angle *p* E D, ce que je démontre ».

« E W Z & W E j ſont iſocèles, donc
» W *j* E = Z W E. L'angle *j* W E extérieur
» eſt égal aux deux intérieurs W Z *t* &
» W E *t*; donc W j E eſt égal à ces deux
» mêmes angles, & par conſéquent il eſt
» double de l'un & de l'autre. L'angle DE*p*
» extérieur eſt auſſi égal aux deux intérieurs
» *t* E *j* & W j E (pris enſemble), partant il
» eſt triple de W E *t* moitié de W E *j*;
» (car CE*p* = à E W*t* & D E C = W E j) ».

RÉFUTATION.

Cette même démonſtration rapportée à une conſtruction méchanique, ſe trouve ici dans une conſtruction faite avec la règle & le compas, & établie ſur d'autres meſures qui donnent les deux triangles iſocèlles Z W E & W E D & les deux

proportionnelles W t & E j que l'on a toujours cherché en vain, parce qu'elles devoient être mesurées par le triangle D Z p dont le sommet Z étoit indéterminé, ainsi on cherchoit l'inconnu pour l'inconnu, & l'on s'est apperçu qu'il n'étoit pas possible de réussir dans cette recherche; d'où l'on a conclu que la trisection géométrique de l'angle étoit impossible ; il est évident en effet qu'on ne pouvoit pas y parvenir par l'entremise de deux moyennes proportionnelles qu'on ne peut obtenir que par cette même trisection ; car l'effet ne précède pas sa cause; il y a donc un renversement d'idées dans le raisonnement qui a conduit à conclure, que la trisection de l'angle est impossible par la règle & le compas.

Tous les Géomètres à préjugés ou à protocole, peuvent regarder cette décision comme une démonstration convaincante, mais les Géomètres Philosophes n'y voyent qu'un paralogisme grossier, & pensent qu'on ne peut parvenir à la solution de ce Problême que par d'autres recherches.

On peut avoir déja beaucoup cherché sans trouver, ce défaut de succès n'est pas une démonstration de l'impossibilité de trouver; les mesures & les rapports

géométriques ſont infinis & inépuiſables ; d'où il faut conclure au contraire que l'on n'a pas pu démontrer l'impoſſibilité de la triſection de l'angle : ainſi les idées communes de problêmes ſolides, de problêmes plans, d'équations de trois dimenſions, de réductions d'une progreſſion à quatre termes, de deux moyennes proportionnelles, de l'inſuffiſance actuelle des élémens de la Géométrie démonſtrative, ne peuvent rien prouver contre la poſſibilité des progrès de cette ſcience, où l'on procède, dans les conſtructions, par règle & le compas, & où il faut démontrer rigoureuſement la certitude des opérations ſans règle ni compas.

CONSTRUCTION

Qui donne d'abord les deux moyennes proportionnelles FP & NE, *de la triſection de l'angle.* (Pl. VI).

Soit l'angle AED, propoſé pour être diviſé en trois parties égales, par ſon arc ABCD.

Tirez ſa diamétrale EL, prolongée en I.

Du point E, pour centre au point A, décrivez le cercle S, & tirez ſon diamètre ON.

Du point P, à la circonférence du cercle S, au point E, décrivez le cercle T, & tirez ſon diamètre Q R.

Du point D au point I, tirez la ligne D I.

Tirez la ligne L S = D I, elle coupera le demi-diamètre E O en *v*.

Prenez la meſure E *v*, portez-la de *v* en N ſur le rayon E O.

Prenez la meſure E I, portez-la de N en K, tirez la ligne N K, elle ſera égale à X I qui eſt égale à E I; vous aurez le triangle N K E & les deux proportionnelles N E & F P, qu'il falloit trouver.

Du point F au point C, tirez la ligne C *r*, parallele à la diamétrale L I.

Prenez la meſure F P, portez-la de P en G; du point G au point E décrivez le demi-cercle V.

Du point A au point K, tirez la ligne A K, & du point E au point G, tirez la ligne E G; prolongez la de G en *d* & de E en C, elle ſera parallele à D K.

Prenez la meſure C L, portez-la de L en B & de P en G; tirez la ligne ponctuée B *t*, parallele à C *r*.

De E en F tirez la ligne B *b*.

Du point I au point P, décrivez l'arc *o* P *o*, qui ſera égal à l'arc F P G, & leurs cordes égales à *m m*, étant tous compris entre les deux paralleles B *t* & C *r*.

DÉMONSTRATION.

La ligne D E eſt un rayon du cercle S. Les trois lignes G M, E G & G K ſont des rayons du cercle V, qui a ſon centre en G, & qui eſt égal au cercle S.

Or les rayons de cercles égaux ſont égaux : donc les lignes D E, E G, G M & G K ſont égales : donc le triangle E G K eſt un triangle iſoſcele égal au triangle iſoſcele G E B qui eſt égal à ſon externe B E C, & égal auſſi à G E F qui eſt oppoſé à E B C, & égal encore à F G K, qui a ſa baſe F G commune avec l'angle F E G : donc les lignes C *r* & B *t* ſont paralleles.

La ligne D K & la ligne C *d* qui renferment le lozange E F K G, ſont paralleles à même diſtance que les paralleles C *r* & B *t* qui renferment auſſi le même lozange, qui leur eſt commun par ſa diagonale F G égale à N E, à V *v* & à E M : donc l'arc F P G eſt égal à l'arc D C & égal auſſi à l'arc C B meſurés les uns & les autres ſur des cercles égaux par des triangles égaux entre des paralleles ſemblables.

Donc l'arc D C eſt égal à l'arc C B, & auſſi à l'arc B A qui ſont compris tous les trois entre ſemblables parallèles.

Voyez ci-devant page 54, la démonſtration du P. Lamy, qui eſt celle d'Hyppocrate de Chio en ſuppoſition.

SCHOLIE.

Pourquoi établiſſez-vous votre opération par les lignes D I & L S?

C'eſt qu'elles donnent les deux proportionnelles N, E qui meſurent D C & F P qui meſurent L C moitié de C D; car *u m* prolongée en C eſt parallele à L P, & ces deux paralleles renferment F P & C L qui eſt moitié de C D.

Et parce qu'elles donnent auſſi les deux mêmes proportionnelles E N & F P meſurées par des rayons de cercle D E, F E & F K entre les extrêmes D N & N F & F K, qui eſt égale à K G, à G E, à G M & à G *d*.

Ainſi les trois rayons C E, E G, G *d* forment la ligne C d qui paſſe par les centres des cercles S & V, & qui eſt parallele à la ligne N K prolongée en D, parce que N E & F G qui les réuniſſent, ſont paralleles & égales l'une à l'autre : donc D C eſt égal à K d, & F P égal à L C moitié de C D.

Donc L C eſt le tiers de l'arc D L, qui eſt la moitié de l'arc total D C B A qui meſure l'angle donné D E A : donc cet angle donné eſt diviſé en trois parties égales par les deux rayons C E & B E.

On voit auſſi que la portion d'arc D B eſt égale à la portion d'arc C A, & que ces deux portions D B & C A étant diviſées chacune par moitié en C & en B, l'arc total D C B A eſt diviſé en trois parties, & que ces trois parties ſont égales, parce que chaque moitié eſt égale à ſon autre moitié, qui eſt auſſi une partie du même arc.

L'évidence de cette démonſtration n'exige que le ſimple bon ſens pour être ſaiſie clairement, car tout le monde ſçait que deux moitiés ſont égales l'une à l'autre.

On voit encore que E M eſt égale à A q qui eſt égale à q C, à C B & à B A; ce qui conſtitue le lozange A q C B, dont la diagonale q B coupe par moitié en B la portion d'arc C A : or C E eſt la diagonale prolongée en E d'un pareil lozange, laquelle coupe auſſi par moitié en C la portion d'arc D B, qui eſt égale à C A.

Donc l'arc total D C B A eſt diviſé en trois parties égales par les lignes C E & E B.

Mais l'abrégé de toutes les démonſtrations de la triſection de l'angle, eſt de reconnoître ſi les trois parties diviſées ſont des moitiés de deux portions de l'arc total, qui ſe croiſent par moitié; car l'égalité des diviſions par moitié eſt ſi manifeſte & ſi inconteſtable, qu'elle n'a pas beſoin d'être certifiée par la déciſion des Maîtres en Géométrie, où l'on ſe pique ſi facilement au jeu, que ſouvent on ne cherche qu'à embrouiller les idées par la métaphyſique des indéterminables. On en a vu un bel échantillon dans notre Préliminaire. Dans la Géométrie démonſtrative tout le monde clair-voyant peut être

Juge des démonſtrations connues dès l'enfance ſans d'autres Maîtres que l'évidence de premier aſpect. Cette démonſtration ſimple & vulgaire, à laquelle nous nous attachons ici, eſt expoſée fort ſenſiblement dans la conſtruction ſuivante, qui ne préſente que des diviſions par moitié qui donnent des tiers.



TRISECTION DE L'ANGLE.

Par le rapport de la moitié d'un Arc avec le tiers du même Arc. (Pl. VII).

ON peut couper tout arc quelconque par moitié, par quart, huitiéme, &c.

Or, le rapport de la division de la moitié au tiers, est comme 3 à 2 ; du tiers au quart comme 3 à 4, &c. Cela est manifeste par le calcul ; mais des nombres ne sont pas des mesures ; il faut démontrer en Géométrie par des mesures ; or, c'est par le rapport des mesures géométriques, de la moitié au tiers, que vous parviendrez au développement du mystère de la trisection de l'angle.

CONSTRUCTION. (Pl. VII).

Soit ABCD l'arc qui mesure l'angle donné AED ; prenez la mesure ET, portez-la de T en N.

De E en N décrivez l'arc KNQ.

Divisez par moitié en L, la moitié KN de cet arc KNQ.

Tirez la ligne L E & la ligne L T; divisez par moitié en *f* la portion d'arc LN; tirez la ligne *f g*, elle coupera par moitié en G la ligne L T, ou divisez cette ligne L T par moitié en G par la ligne *a b*.

Du point E au point de section G, décrivez l'arc F R I; cet arc sera une moyenne proportionnelle entre l'arc K N Q, & l'arc donné A B C D.

Divisez par moitié en H la portion d'arc G I par la ligne O E.

Divisez par moitié en G la portion d'arc F H par la ligne M E.

Divisez par moitié en S la portion d'arc H I par la ligne P D.

Divisez par moitié en X la portion d'arc F G par la ligne L A, l'arc F R I sera divisé en six parties égales.

DÉMONSTRATION.

Les divisions de l'arc F R I par les lignes T P, P D, & par les lignes L T, L A & N E, sont des divisions par moitiés & des sous-divisions de moitiés par moitiés, qui partagent l'arc F R I en six parties égales; ainsi ce même arc est partagé en trois parties égales par les lignes G E & H E; par conséquent ces mêmes lignes G E & H E prolongées en O & en M, partagent aussi

en trois parties égales KNQ & ATD qui ſont concentriques à l'arc FRI. Donc l'arc donné ATD eſt diviſé en trois parties égales par les lignes ME & OE. La démonſtration ſera complette, s'il eſt démontré que l'arc HF eſt égal à l'arc GI. Or il eſt prouvé par les ſix diviſions, qu'ils ſe tendent réciproquement à la moitié l'un de l'autre ; donc ils ſont égaux.

On voit donc par tout ce détail que les différentes démonſtrations des conſtructions précédentes de la triſection de l'angle, ſe réuniſſent toutes aux mêmes points démonſtratifs.

CONCLUSION.

La rigueur des preuves à laquelle la Géométrie eſt aſſujettie, doit nous faire ſentir que l'étude de la Géométrie démonſtrative, *réduite à l'exactitude d'un point perceptible*, eſt l'étude même de *l'évidence ſtricte*, & que cette étude eſt eſſentielle pour débrouiller & réaliſer les idées, pour former le jugement, & pour conduire l'eſprit à la certitude déciſive de tout ce qui peut être connu : ainſi, la Géométrie démonſtrative doit être une ſcience de première éducation, où l'on ne doit confier les Elèves qu'à des Maîtres qui

s'attachent à enſeigner lumineuſement cette ſcience dans toute ſa pureté & dans toute ſon étendue, & à interdire tout accès à l'art ténébreux & ſéduiſant de faire triompher le doute & l'ignorance par des ſubtilités inſidieuſes, qui inſpirent tant de ſuffiſance aux eſprits ſuperficiels & avantageux, qu'ils perdent, en ſe livrant aux diſputes rafinées & aux excurſions ſur les êtres imperceptibles, qu'ils perdent, dis-je, l'aptitude naturelle de ſaiſir l'évidence dans la recherche de la vérité. On s'abandonne aux abſtractions métaphyſiques de la Géométrie des imperceptibles, & aux liaiſons logiques des idées factices, & ce ſont ces liaiſons même que l'on prend pour *l'évidence*, ſans s'appercevoir que c'eſt primitivement dans les idées, même bien avérées, & non dans la ſimple liaiſon des idées que conſiſte le *criterium veritatis*, ou le caractère déciſif de la certitude, par lequel on évite les fauſſes notions qui ne conduiſent qu'aux préjugés, aux conteſtations, aux diſtinctions idéales & à l'apoſtaſie de l'évidence même des réalités, qui eſt le dernier excès de l'égarement de l'intelligence humaine, & l'anéantiſſement de la Géométrie & des Géomètres; car on ne voit plus pourquoi les démonſtrations démontrent, & il n'eſt plus poſſible alors

alors de prouver qu'elles démontrent ; il faudroit prouver ce qui peut-être n'existe pas dans la nature ; il faudroit prouver, dit-on, qu'un cercle, qu'un quarré, &c, sont parfaits ; mais ne doit-on pas reconnoître qu'indépendamment de cette perfection idéale, qui nous est seulement indiquée par nos sensations, il faut être assuré qu'il existe des cercles, des quarrés, &c, aussi parfaits qu'il nous est possible de les connoître avec évidence, & que cette connoissance qui nous suffit, est celle à laquelle nous devons nous fixer : elle s'étend si loin dans les sciences, que nous ne l'epuiserons jamais ; il ne faut donc pas se déplacer, & quitter la lumière pour se plonger dans les ténèbres.

La science de démontrer, qui est la même que celle de raisonner, & de juger sûrement, élève l'esprit à la plus sublime fonction de l'intelligence humaine ; les Géomètres qui négligent cette partie essentielle de la Géométrie, & qui la regardent comme une dépendance de la pratique des Artistes, n'ont apperçu ni la supériorité ni l'importance de cette étude, mais il faut des mesureurs : point de mesureurs ; point de Géomètres Arpenteurs : j'entends des mesureurs qu'il ne faut pas confondre avec les Arpenteurs & les Ar-

tistes, dont le métier n'est pas assujetti à la précision de la Géométrie démonstrative rigoureuse. On croit, dans l'éducation, assurer la marche du jugement par la logique, qui, à la vérité, nous assure de l'évidence de la liaison & des rapports décisifs de quelques idées qui se présentent à l'esprit ; mais elle ne nous apprend pas à chercher & à réunir toutes celles qui sont nécessaires pour établir un jugement assuré : l'esprit peu instruit conclut aussi décisivement par la liaison & le rapport de deux idées où il en faudroit quatre, que s'il les avoit effectivement réunies toutes quatre ; & en raisonnant bien, il décide fort mal ; aussi n'y a-t'il rien de si commun que les faux jugemens suggérés par la logique. Il n'en est pas de même des opérations de l'esprit dans la Géométrie démonstrative ; la solution des problêmes est si rigoureuse qu'aucune des conditions requises pour décider sûrement ne peut lui échapper, sans qu'il ne soit convaincu manifestement de son erreur ; la marche du raisonnement y est dessinée, & dépose sensiblement contre lui, lorsqu'il se trompe ; & il peut acquérir une habitude si constante & si régulière dans la recherche de la vérité, qu'il sera toujours en garde dans la suite contre les décisions précipitées d'une Logique séduisante.

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES ET PHYSIQUES.

ON demandera peut-être pourquoi tant de démonstrations ; une seule bien évidente ne suffit-elle pas pour assurer la solution d'un problême ? Oui, dans l'ordre de la Géométrie démonstrative ; mais la Géométrie métaphysique présente tant de halliers où l'on peut former des embuscades, qu'il est nécessaire de se tenir en garde de tous côtés par des retranchemens inattaquables. C'est l'imperfection & l'obscurité insidieuse de la science qui entraînent dans ce labyrinthe où s'égarent ceux qui se livrent ou qui s'attachent à dessein aux incertitudes des abstractions métaphysiques, pour exercer leurs subtilités sophistiques contre les solutions des problêmes contentieux ; c'est pourquoi une simple démonstration d'un problême ne suffit pas alors pour en assurer la décision ; il en faut d'autres pour dissiper décisivement les incertitudes illusoires de la Géométrie des imperceptibles.

Une complication si étrange & si déplacée, une complication, dis-je, de mesures qui se démontrent évidemment,

& d'autres meſures qui excluent abſolument toute évidence, ne peut diſparoître qu'en ſuivant le plan ſimple & lumineux des Élémens de Géométrie que nous a tracé le célèbre *M. Clairau*, & qui eſt ſans doute auſſi celui de tous les grands Maîtres, leſquels remontent aux premières idées eſſentielles qui débrouillent les ſciences, & nous retiennent dans les limites du *cognoſcible*. Le ſçavant Géomètre, que nous venons de citer, démontre d'abord les problêmes au lieu de démontrer les théorêmes, pour démontrer les problêmes par des renvois multipliés qui déconcertent l'attention des Etudians, & qui découpent l'enchaînement de la ſcience, & la réduiſent à un ordre factice, qui n'y laiſſe aucune liaiſon lumineuſe. Ainſi, on peut eſpérer qu'il ne reſtera dans la fauſſe route que ceux qui n'en connoiſſent pas d'autre que l'étude de cette multitude inutile de théorêmes qui ſurchargent la mémoire ſans éclairer l'eſprit.

On apprend aux Etudians en Géométrie à connoître les démonſtrations des problêmes par les théorêmes, comme on apprend aux enfans à connoître les pièces de monnoie : on leur montre une pièce de douze ſols, & on leur dit qu'il eſt dé-

cidé qu'elle vaut douze ſols, ſans leur apprendre pourquoi elle a cette valeur. La valeur d'une autre pièce du même poids & de même qualité d'argent, qui ne ſera pas ronde, leur ſera inconnue : une nouvelle forme de démonſtrations dépayſe de même un Géomètre qui ne peut la vérifier par les théorêmes. Voyez ſur ce ſujet les ſçavantes & profondes réflexions de M. d'Alembert : *Mêlange de Littérature, ſeconde Edition 1759, tome IV, page 165.*

Ce n'eſt pas par une telle marche qu'on peut parvenir à approfondir une ſcience, & à diſſiper les doutes par le ſçavoir & le diſcernement de l'évidence des vérités poſitives d'avec l'illuſion ſéduiſante des abſtractions idéales. Ainſi la Géométrie démonſtrative attend encore des élémens complets, en bon ordre & mis à la portée des jeunes Etudians ; cette dernière condition eſt la plus difficile à remplir ; chaque démonſtration doit être, autant qu'il eſt poſſible, ſimple, claire, tranchante, fondée ſur les premières notions de la Géométrie naturelle * ; celui qui y

* Il faudroit commencer par donner de ſuite la conſtruction des figures géométriques ſimples & régulières, rapportées à la ligne droite & au cercle, parce que ces figures ſimples peuvent fournir toutes les meſures néceſſaires

réussira le mieux, sera l'Auteur le plus excellent, & véritablement Auteur, car il sera inventeur dans la science des démonstrations; mais comme dit *M. d'Alembert, Descartes, Newton, Leibnitz, ne seroient pas de trop;* & encore ici faut-il se faire enfant pour les enfans.

L'esprit ne fait pas les vérités; il les découvre; & ce sont ces découvertes, bien assurées par l'évidence, qui forment les connoissances: les règles sont des formules artificielles qui marquent la marche que l'on s'est frayée; mais elles ne sont pas elles-mêmes l'objet de nos recherches;

---

pour démontrer les divers problêmes assujettis aux cas particuliers. Les mesures géométriques primitives, ou les premieres notions naturelles & évidentes, les plus simples se présentent, au premier aspect, dans les constructions des figures simples; elles n'ont pas besoin d'être démontrées, mais seulement expliquées, & elles entrent ensuite explicitement ou tacitement dans les démonstrations des Problêmes qui se prouvent par déduction ou liaison d'idées. Quand elles y entreront tacitement, & qu'on croira qu'elles ne sont pas encore assez familières aux Commençans pour bien entendre chaque démonstration, il faut ajouter à la démonstration une scholie à part, qui explique ce qu'on soupçonne qui ne sera pas saisi par l'Ecolier. Ces scholies évitent les répétitions & les renvois dans les démonstrations. On lit les scholies si on en a besoin; par ce moyen l'intelligence des démonstrations sera toujours assurée pour les Commençans, sans trop étendre les démonstrations, & sans fatiguer les Elèves. Il faut leur faire saisir bien clairement les notions naturelles de la Géométrie, parce qu'elles ne se prouvent pas par des dé-

ainsi elles ne doivent pas captiver l'esprit dans l'étude des sciences, car on resteroit toujours Ecolier, & jamais on ne parviendroit aux découvertes qui n'ont pas de liaison directe avec les règles factices, où l'on croit voir l'impossibilité d'étendre plus loin les progrès d'une Science, particulierement en Géométrie, à l'égard des mesures & des divisions précises de toutes les parties du cercle, qui forme avec la ligne droite les premiers linéamens de la Géométrie, où les mesures doivent être réduites à l'exactitude d'un point perceptible, lequel renferme toujours le point

---

monstrations composées & en forme pour conduire à l'évidence; car il n'y a rien de plus évident que l'évidence primitive qui se présente immédiatement par elle-même, & sur laquelle s'établit toute évidence de déduction dans les démonstrations géométriques composées, & dans les argumentations logiques. Par exemple, on apperçoit naturellement qu'un diamètre est plus grand qu'un demi-diamètre, parce qu'il est visible que le diamètre est plus grand que sa moitié : il n'est pas possible de prouver cette évidence par une autre évidence plus évidente: c'est donc par cette première évidence que nous sommes assurés de la certitude des démonstrations géométriques; car ce ne sont pas les démonstrations qui forment l'évidence, c'est au contraire l'évidence qui les décide. Ceux qui exigent que l'on démontre tout en Géométrie, n'ont pas l'idée de la certitude de la vérité. Mais, dira-t-on, tous les hommes ne saisissent pas l'évidence ? Ce ne sont pas les aveugles qui jugent des couleurs. On n'en a pas moins de confiance aux décisions des clairvoyans, & ceux-ci sont bien assurés de ce qu'ils voyent bien clairement.

idéal & hypothétique, que l'on appelle le point mathématique.

Mais en vain voudroit-on fouiller dans le point perceptible pour y chercher la place d'un point imperceptible, qui suppose un soupçon, un rien d'exactitude de plus que le point perceptible, un rien, dis je, qui ne peut pas être connu, & qu'on ne peut reclamer sérieusement dans les mesures où commence l'évidence, & qui, excepté cette futilité ténébreuse, sont connues avec une certitude incontestable, car la vérité y est dessinée par les constructions qui l'empêchent de disparoître & d'échapper aux sens, auxquels elle ne se montre que dans sa pureté, c'est-à-dire, toujours dégagée de cet alliage mal entendu de l'imperceptible & du connu, alliage où on ne reconnoît plus ni exactitude ni certitude décisives. *Cette philosophie obscure & contentieuse, qu'on cherche à introduire dans le siége de l'évidence, est le fruit de la vanité des auteurs & des lecteurs.* M. d'Alembert, *ibid.* pag. 178.

Il faut donc, pour chasser de la Géométrie démonstrative tous les doutes qui lui sont étrangers, sçavoir où commence l'évidence qui n'admet que des mesures assurées, & qui ne se prête point au badinage insidieux des abstractions métaphysiques.

On peut d'ailleurs laiſſer aux grands calculateurs les ſuppoſitions qu'on réunit à ces abſtractions, & qui ſont inapplicables à la Géométrie démonſtrative, des grandeurs réellement meſurables, pour occuper pompeuſement leurs talens à des ſuppoſitions tranſcendantes qu'on exerce ſur d'autres genres de quantités, par le calcul infiniteſimal & par des approximations idéales & appréciables, où les calculs, pouſſés à perte de vue, indiquent des progreſſions qui ſemblent s'étendre juſqu'à l'infini & juſqu'aux infinités d'infinis; ce qui fournit une carrière immenſe aux ſpéculations mathémathiques, & aux recherches des quantités appréciables, qui, rigoureuſement parlant, ne ſont pas meſurables, telles ſont les quantités qui ſe rapportent aux qualités des corps, aux mouvemens compliqués, aux frottemens, aux communications des mouvemens, & aux réſiſtances réciproques des corps en mouvement, &c, qu'on évalue, autant qu'il ſe peut, par des calculs abſtraits qu'on tâche d'ajuſter par comparaiſon à des meſures poſitives, & qui ne peuvent être aſſujetties à aucune exactitude aſſurée & rigoureuſe; car ces ſortes de quantités ne ſont pas du genre de celles des grandeurs meſurables, elles ſe prêtent trop aux calculs arbitraires,

quelquefois trop hasardés, dont l'emploi ne peut être d'aucune sûreté dans la Géométrie démonstrative; car lorsqu'un calcul se perd dans les imperceptibles, ce n'est plus qu'un calcul abstrait qui ne peut pas fournir aux Géomêtres aucun rapport décisif sur les mesures des grandeurs.

Cependant on n'a pas encore banni de la Géométrie démonstrative ces calculs abstraits, qui ne peuvent y porter que des conjectures numériques purement idéales, qui ont bien occupé jusqu'à présent les chercheurs de la quadrature du cercle, sans qu'ils se soient apperçus que les nombres trop grands, ou les nombres trop petits qu'ils croient trouver par leurs calculs des imperceptibles, sont des indéterminables qui disparoissent dans les démonstrations géométriques; car, si le point géométrique est placé exactement où il doit être, le centre de ce point est le lieu juste où il n'y a pas de plus ni de moins; & ce lieu intellectuel est toujours sous-entendu dans les démonstrations géométriques, de maniere que, s'il y a erreur dans ce point, elle est toujours soupçonnée proche du centre; ce qui la réduit à rien, ou comme à rien dans les constructions qui, à cela près, sont exactes, & par conséquent plus décisives que les résultats d'un calcul abstrait où les

erreurs ſont bien plus grandes ; car l'unité numéraire peut n'y être pas la même à beaucoup près (la même, ce ſeroit un beau haſard) que celle du point mathématique indéterminable, qui élude toute démonſtration, parce qu'il eſt toujours inconnu.

Il n'y a donc pas d'équation aſſurée de l'infini au fini ; car dans ces ſortes d'équations les erreurs ſont toujours proportionnelles à la grandeur des meſures ; ainſi elles s'accroiſſent dans la progreſſion du petit au grand : au contraire, les petites erreurs dans les démonſtrations géométriques régulieres, diminuent dans la progreſſion du petit au grand, parce qu'un point géométrique fait avec le même inſtrument, n'eſt pas plus grand dans une grande meſure que dans une petite, & que, par proportion, l'erreur eſt plus petite dans une grande ; au lieu que, dans une erreur proportionnelle à un degré, par exemple, il n'en eſt pas de même ; car le degré d'un grand cercle eſt plus grand que celui d'un petit.

Il eſt à remarquer auſſi qu'on eſt encore fixé, dans la Géométrie phyſique, aux loix méchaniques ou aux loix apparentes du mouvement de tranſlation en lignes droites & en lignes courbes ; ce qui, à la vérité, peut ſuffire en aſtronomie, où l'on

n'obſerve que la marche des corps céleſtes, & où l'on peut prendre pour prototype quelque phénomène général, comme la gravitation, ou même une fiction telle que l'attraction qui peut s'ajuſter facilement aux obſervations & aux calculs. L'attraction, la peſanteur ſpécifique, & le calcul ſublime, ont un emploi fort étendu dans les hypothèſes phyſiques ; mais la gravité abſolue ou primitive & les autres mouvemens préordonnés & permanens ſe confondent tellement avec les mouvemens variées par des cauſes ſimplement déterminantes ; que l'on confond auſſi ces mêmes cauſes avec la premiere & la ſeule cauſe phyſique de tous les mouvemens de la nature, & on croit que le mouvement eſt anéanti, lorſque ces cauſes déterminantes ceſſent de le rendre ſenſible par la tranſlation des corps viſibles. Mais revenons à la peſanteur ſpécifique obſervée dans notre atmoſphere.

A quoi ſert, pour le mouvement des planettes le calcul de la chûte des corps qui traverſent l'atmoſphère terreſtre, ſi cet atmoſphère ne s'étend pas juſqu'aux eſpaces immenſes des régions céleſtes, & ſi la gravité primitive y eſt aſſujettie à d'autres cauſes déterminantes qui influent dans les diverſes combinaiſons des mouvemens

respectifs des corps céleftes ? On ne veut pas rabaiffer les fecours que l'on tire du calcul tranfcendant : mais toujours eft-il à remarquer qu'il demande beaucoup de circonfpection dans fon application, & dans les conféquences que l'on en tire, pour faire valoir une uniformité générale, qui n'exifte pas dans la nature; il faudroit y diftinguer les effets des caufes motrices phyfiques primitives d'avec les effets des caufes déterminantes qui varient à l'infini, & qu'on ne peut appercevoir que par des obfervations particulières qui ont entre elles fi peu de liaifon, qu'elles ne peuvent prefque pas procurer de connoiffances générales qu'on puiffe réunir par le calcul & par des mefures empruntées les unes des autres.

Les mefures de la pefanteur fpécifique, ni celles de la prétendue attraction, n'ont rien de commun avec celles de la pefanteur abfolue, ni avec celle des radiations électriques, des explofions fpontanées, &c.

Plus on veut affimiler & fimplifier en phyfique, plus on s'égare; les caufes générales déterminantes y font peu connues, & les caufes particulières fort compofées : les plus fçavans dans cette fcience font ceux qui ont le plus de connoiffances de détail.

Le Phyſicien procède par inventaire & évalue tout pièce à pièce : le Calculateur voit plus en grand ; il fait des maſſes, & par des modifications de calcul, il ſe forme des données, & ramène le tout par compenſation à des prix communs. Dans ces cas, le calcul abſtrait eſt un art fort ingénieux qui, quoiqu'il ne ſoit pas toujours en bonnes mains, ſupplée à bien des connoiſſances de détail, & inſpire beaucoup de confiance, ſur-tout lorſqu'il porte les apparences de l'exactitude juſqu'à l'infini, & ſa marche tranſcendante ſeduit même les plus experts, lorſqu'ils veulent calculer ce qu'on ne connoît pas. Newton, qui calculoit tout, a calculé la chaleur que le ſoleil communiqua à la Comette de 1680, ſans ſçavoir qu'elle eſt la chaleur du ſoleil, ni comment ce globe cauſe de la chaleur au-deſſus de notre atmoſphère, car plus les nues s'élèvent, plus elles ſont ſaiſies par le froid. Cependant il jugea par l'approximation de cette Comette, que le ſoleil devoit lui avoir communiqué une chaleur deux mille fois plus ardente que celle d'un fer rouge : mais de tels calculs neſont pas de la phyſique réelle ; il en eſt de même de cette maſſe prodigieuſe d'analogies controuvées ou de comparaiſons fictices entaſſées dans la Philoſophie

naturelle de cet Auteur ; ce qui ne séduit que ceux qui ne distinguent pas les notions mathématiques idéales d'avec les notions physiques mécaniques : voilà l'illusion radicale & subreptice de tout le systême. De grands Calculateurs se contentent de prétendus effets mesurés & calculés avec beaucoup d'art, sans appercevoir de causes réelles ; mais les Physiciens ne voient dans cet admirable travail qu'une peinture sublime d'un Palais enchanté.

La Géométrie, il est vrai, peut calculer & mesurer ce qui est arrangé physiquement ; mais ses mesures & ses calculs ne conduisent point aux connoissances des causes physiques de cet arrangement : or ce sont ces connoissances qui forment la science de la Physique : donc ce n'est pas par les mesures ni par les calculs qu'il faut chercher à étendre cette science, & à en prouver la réalité.

Les causes motrices s'étendent beaucoup plus loin que celles qu'on attribue au mouvement de translation ; elles produisent en outre un autre genre de mouvement, un mouvement de pression, qui ne laisse aucun corps dans l'inertie, & qui agit toujours puissamment sur les corps qui se déplacent, & sur ceux qui paroissent en repos : les corps nâgent dans un fluide, qui les en-

traîne par des courans diverſement déterminés, & qui eſt le réſervoir, la voiture & le voiturier de tout mouvement de tranſlation des corps viſibles, & le lien général de tout le ſyſtême réel de l'univers, ſans ceſſer d'être préſent & en action partout par un effort perpétuel, qui paroît & diſparoît ſans être jamais anéanti; la réalité de cet effort nous eſt indiquée par une multitude de faits auxquels on n'eſt pas aſſez attentif; car ces faits prouvent néceſſairement une ſubſtance impénétrable, mobile, infiniment fluide, qui forme un enſemble ou un plein, qui eſt l'organe phyſique univerſel d'une action puiſſante, continuelle & générale, par laquelle une cauſe motrice, intelligente, univerſelle, opère régulièrement tous les effets qui conſtituent le méchaniſme de l'univers; & ces effets s'opèrent avec une correſpondance, une liaiſon perpétuelle ſi générale, ſi étendue & ſi multipliée, qu'il ne nous eſt pas poſſible d'en comprendre la marche ni les rapports, & les combinaiſons qui aſſurent la durée, l'accord & les variétés conſtantes de cet enſemble immenſe.

La matiète ne ſe préſente à nous que ſous des formes qui la dérobent entièrement à nos ſens & à notre intelligence, & qui nous jettent dans des erreurs groſ-

ſieres

ſières ſur la nature de cette ſubſtance. Nous ne pouvons abandonner l'idée dominante de la ſolidité ou de la dureté qui en eſt une forme, & nous l'attribuons toujours primitivement aux parties intimes de cette ſubſtance : lors même que nous la concevons comme dépouillée de toutes ſes formes, nous nous repréſentons toujours ces parties dans un état de réunion, comme ſi l'eſſence & l'exiſtence de la matière première conſiſtoient dans la forme de corps durs, figurés, réſiſtans, laiſſant entre eux des vuides, & ſe communiquant réciproquement des frottemens & des obſtacles à leur mouvement; ainſi au lieu de reconnoître une ſubſtance mobile, impénétrable, ſans union, & toujours en action, nous ne nous repréſentons que des petits corps durs, qui ſe réſiſtent mutuellement, & dont la diverſité des figures s'oppoſe à leur contact parfait. C'eſt toujours ici l'imagination qui préſide dans nos conceptions & dans nos raiſonnemens, & c'eſt elle qui conſtruit, ſelon ſes fictions, le ſyſtême de la nature; alors on porte le calcul des réſiſtances & des frottemens juſques dans le mouvement d'une ſubſtance infiniment fluide & mobile ; & on croit qu'il faut rejetter la poſſibilité d'un enſemble plein & coulant, & la poſſi-

bilité d'un mouvement non interrompu ; impériſſable, & une correſpondance générale d'activité ou d'effort dont nous ne pouvons pas ſaiſir l'ordre phyſique, parce que nous ne pouvons la concevoir que comme un aſſemblage de contre-marches diſcordantes & inexplicables. Mais nous voulons expliquer en poſant nous-mêmes les conditions, car nous croyons même que la ſcience du Phyſicien, conſiſte dans les explications générales des cauſes, & non dans la connoiſſance des objets phyſiques & des phénomènes particuliers. Ceux qui veulent briller par la vaſte étendue de leur imagination, dédaignent ces connoiſſances bornées, & de petit détail ; ce ſont cependant ces connoiſſances mêmes qui reſtent, & qui ſont dignes des travaux des Corps Académiques, où l'on ne calcule que des découvertes & non des hypothèſes, qui ne ſont jamais que de vaines tentatives qui dégradent les ſciences.

On donne pour axiome en méchanique, qu'*un effet ne peut ſurpaſſer ſa cauſe.* De quelles cauſes entend-on parler? S'agit-il de cauſes déterminantes, ou de cauſes motrices phyſiques ? C'eſt ce qu'on ne démêle point : cependant les effets que nous appercevons ſont produits par des communications de mouvemens actuels

de tranſlation, ou de mouvemens de preſſion, ou par des cauſes déterminantes qui ſont peu connues; mais nous connoiſſons encore moins les loix préordonnées des cauſes motrices primitives, qui peuvent produire par des déterminations dont elles ſont ſuſceptibles, & par le fond de leur activité, dont les bornes nous ſont inconnues, des effets fort différens de ceux que nous appercevons dans la marche ordinaire du méchaniſme, à laquelle on ſe fixe dans les calculs, que l'eſprit arrange & étend comme il lui plaît, ſelon ſes hypothèſes. En un mot, on a entièrement perdu de vue les deux grandes puiſſances actives, le froid & le chaud, ſans la connoiſſance deſquelles on ne peut avoir aucune idée aſſurée des cauſes phyſiques générales, & encore moins des effets qui ſurpaſſent prodigieuſement leurs cauſes ſenſibles. Il faut ſe rappeller la doctrine des anciens ſur l'Ether, & ſuivre leurs obſervations ſur cet agent univerſel. Les effets que produit cette premiere cauſe phyſique ſont ſi généraux & ſi dominans, qn'ils doivent tenir le premier rang dans les ſciences phyſiques; il faut les étudier ſoigneuſement, dans les opérations mêmes de la nature, ſi nous voulons étendre nos connoiſſances ſur les propriétés d'une cauſe puiſſante ſi

féconde & si générale, pour appercevoir au moins le principe actif matériel du méchanisme de l'Univers *.

Les grandes tentatives par le calcul abstrait, exigent beaucoup d'intelligence & de capacité. On sçait d'ailleurs que le calcul infinitésimal est recommandable pour les mesures, la rectification, la quadrature de certaines courbes méchaniques, par les rapports des abcisses & de leurs ordonnées. On a même fait de grands efforts pour l'étendre jusqu'à la Géométrie de la ligne circulaire; mais ces tentatives ont eu peu de succès, & les rapports des abcisses & de leurs ordonnées ne piquent pas beaucoup la curiosité des Sçavans; la Chymie, l'Histoire naturelle, &c. ont pour eux plus d'attraits : d'ailleurs les autres parties de la Physique reviennent prendre leur place dans le vuide de l'attraction, & y faire reparoître le méchanisme matériel; le calcul infinitésimal, après avoir étonné & ébloui la raison humaine, est allé chercher de l'emploi dans les ellipses célestes, où l'algèbre réuni à l'analyse lui avoient tracé la route.

---

* Voyez le premier volume de l'Economie animale, & particulièrement le Traité du Feu, chap. 3. seconde Edition, 1747.

On peut dire cependant que les usages de cet ensemble de calculs sublimes, qu'on appelle transcendans, ont peu surpassé ceux de l'arithmétique ordinaire dans la Géométrie rigoureuse, parce que cette science ne peut faire de progrès que par elle-même; & ses progrès peuvent même contribuer beaucoup à ceux de la science des courbes méchaniques.

Et toujours c'est la Géométrie qui fixe par elle-même l'usage du calcul, soit qu'on y employe l'arithmétique ou toute autre méthode plus recherchée & plus spécieuse; & le Calculateur doit toujours y être assujetti aux limites qu'elle lui prescrit, & ces limites doivent être trouvées & connues avec certitude & exactitude avant que de calculer; ce qui doit être rigoureusement observé, sur-tout dans les recherches de la quadrature du cercle, & dans toutes les autres recherches géométriques; car la marche du calcul, qui veut lui-même se frayer une route, est toujours hasardeuse & insuffisante.

On apperçoit d'ailleurs que le mérite de ces calculs si étendus, si composés, si arbitraires, suppose du moins plus de procédés & de génie que d'évidence dans leur application aux objets réels. On ne peut pas nier que le calcul ne soit vrai en lui-même,

comme toutes les autres vérités métaphysiques détachées des vérités positives ; car c'est le calcul qui forme les sommes, qui garantit ses opérations, & qui nous soumet sans raisonnemens ; mais on peut croire aussi que les résultats des calculs hypothétiques & arbitraires ne sont pas de l'ordre des connoissances lumineuses, destinées à former les sciences qui éclairent la raison, qui dirigent les expériences & les observations physiques, & règlent la conduite des hommes pour les besoins de la vie, & les liens de la société ; c'est pourquoi ceux qui ne s'appliquent pas à cette étude abstraite des calculs spécieux, ne rougissent pas d'avouer à cet égard leur ignorance. Il n'en est pas de même des calculs réunis aux opérations évidentes de la Géométrie démonstrative, qui apprennent quelle doit être la marche régulière de l'esprit dans la recherche de la vérité ; car la Géométrie, proprement dite, n'admet rien qui ne soit rigoureusement démontré ; son objet est la certitude lumineuse & inattaquable.



ESSAI

Sur la transformation géométrique du Cercle en Quarré & du Quarré en Cercle.

NOUS établissons notre opération, autant qu'il se peut, sur le rapport de 7, 22, trouvé par Archimede, quoiqu'il paroisse décidé par le calcul que ce rapport ne donne pas exactement la quadrature du cercle.

Nous allons donner diverses constructions beaucoup plus simples, plus commodes, & qui présentent plus de rapports assurés, communs au cercle & au quarré, que celle qu'on employe ordinairement pour obtenir la transformation du cercle en quarré selon le rapport de 7, 22; les mesures se trouvent presque les mêmes; nous devons en avertir pour en rapporter la découverte à son auteur, qui peut-être ne croyoit pas lui-même son opération rigoureusement géométrique; car il paroît qu'il a confondu, dans ses supputations, le méthaphysique avec le géométrique; qu'il a pris la conséquence pour le prin-

cipe, la liaiſon des idées pour l'évidence; & qu'il a cherché dans l'infini des conditions qui ne conviennent pas à une grandeur bornée, & qu'il n'a pas démêlé la grandeur qui eſt l'objet de la Géométrie d'avec les autres genres de quantités, ni débrouillé le cahos des idées qui ſe préſentent confuſément dans le problême dont il s'agit, & dont le fond, peu méthaphyſique, exige beaucoup d'éclairciſſemens méthaphyſiques, lorſqu'on veut y pénétrer par des calculs abſtraits ou par d'autres voies que par la Géométrie.

Quoi qu'il en ſoit, on n'enviſage ici la quadrature du cercle que comme un problême géométrique; car ce n'eſt qu'à cette condition qu'elle peut être réellement ſuſceptible de démonſtration évidente de premier aſpect ou de déduction ; car ſans les meſures géométriques on ne peut avoir aucune indication intellectuelle des meſures méthaphyſiques, parce que celles-ci ne ſont qu'une conſéquence des premières; & de quelque manière qu'on l'entende, il faut toujours que les points & les lignes méthaphyſiques, qu'on cherche dans l'infini, ſoient enfermés dans les lignes & les points géométriques, ſi l'opération eſt rigoureuſement géométrique; ce qui ſuffit dès-lors pour exclure de la Géométrie les

doutes qui lui ſont étrangers, & pour diſſiper les erreurs du calcul des imperceptibles qui ne peut porter ſur une baſe aſſurée par la Géométrie démonſtrative.

CONSTRUCTION

Pour changer le cercle en quarré, & le quarré en cercle. (Pl. VIII. fig. 1.)

Faites le cercle L.

Tirez les quatre diametres A D & C B, & *p q* & *n n* qui diviſent ce cercle L en huit parties égales.

Du point *q* au point E, décrivez l'arc G E F.

Prenez la meſure de la corde F G, portez-la de B en *æ* ſur le diametre B C.

Prenez la meſure C B, portez-la de *æ* en *d* ſur le prolongement du diametre C B.

Du point E au point *d*, décrivez le grand cercle ponctué I K diviſé en huit parties égales par le prolongement des quatre diametres du cercle L.

Du point *b* au point *c* tirez la ligne *b c*.

Du point *c* au point *a* tirez la ligne *c a*.

Du point *a* au point *d* tirez la ligne *a d*.

Du point *d* au point *b* tirez la ligne *d b*.

Du point *d* au point *b* décrivez l'arc *b æ a*.

Tirez la corde de l'arc E G prolongée en *f*.

Du point *d* au point *f* décrivez l'arc *f æ v*.

Prenez la meſure du côté *d b*. portez-la de E en Q.

Par le point Q tirez la ligne M N égale & parallele à la diagonale *c d*.

Diviſez-la en trois parties égales, enfermées chacune dans un demi-cercle, dont les cordes ſeront diviſées chacune en huit parties égales ; ce qui fait 24 pour la totalité de la ligne M N égale à la diagonale *c d*.

Prenez la meſure *c æ*, portez-la de M en *g*, tirez la ligne *æ g*.

Prenez la meſure *æ œ*, portez-la de *g* en *e*.

Le quarré *œ d* N *e* ſera égal au quarré *a d b c*.

Si on diviſe le côté d'un quarré en quatre parties égales, & qu'on tire une ligne H E, on aura la meſure d'un rayon, qui peut ſervir à changer le *quarré* en cercle.

Autres rapports réciproques du cercle & du quarré, par leſquels on peut transformer le cercle en quarré & le quarré en cercle.

CONSTRUCTION.

Du point A au point *m* décrivez la portion de cercle *m y p*.

Prenez le rayon *m* E du cercle L, portez-le de *y* en *n*.

De *y* en *n* décrivez le cercle B, qui ſera égal au cercle L.

Par le point *n* tirez la ligne *a d*, qui ſera l'hypothenuſe de l'angle droit *a* E *d*, & le côté du quarré égal au cercle L & au cercle B.

Les diagonales *n ç* & *n a* du parallélogramme rectangle *n a c n*, moitié du quarré *a d b c*, ſeront égales chacune au diametre du cercle L & du cercle B.

La ligne *n y* eſt la meſure d'un rayon, qui peut ſervir à changer le quarré en cercle, égal au cercle L & au cercle B.

DÉMONSTRATION.

Soit la diagonale *c d* diviſée en trois parties égales, & chacune de ces trois parties ſoudiviſées en huit parties égales, chacune de ces huit parties ſera égale à ſix degrés de la circonférence du cercle L.

La ligne *d* æ eſt égale au diametre du cercle L, & contient 19 des 24 parties de la diagonale *d c*; ainſi ces 19 parties, qui ſont chacune égale à 6 degrés de la circonférence du cercle L, font en tout 114 degrés; la ligne *d œ*, qui eſt égale à un des côtés du quarré, eſt égale à 17 des 24 parties de la diagonale; chacune de ces parties étant auſſi de 6 degrés de la circonférence du cercle, les 17 font 102 degrés.

Les 114 parties du diametre étant triplées, donnent 342 ; ainſi il s'en manque 18 degrés qu'ils ne ſoient égaux aux 360 degrés de la circonférence de cercle L. Mais, en prenant 20 meſures ou les cinq ſixiémes de la diagonale, on aura 6 degrés de plus, qui, étant triplés, donneront préciſément les 18 qu'il falloit ajouter à 342 ; *ce qu'il falloit trouver & démontrer* *.

OBSERVATIONS

Sur la quadrature métaphyſique du Cercle.

ARCHIMÈDE a employé dans ſes recherches, ſur la quadrature du cercle, un polygone de 96 côtés : or on peut, comme dans la démonſtration précédente, multiplier les ſousdiviſions de ce polygone juſqu'à l'imperceptible, & on arrivera à la même déciſion. Il eſt vrai qu'on n'a pas crû qu'il fût poſſible que cette démonſtration pût être exacte, parce que le cercle eſt plus grand qu'un polygone inſcrit, & qu'il eſt plus petit qu'un polygone circonſcrit ; on ſçavoit pour tant que plus on les

* Voyez ci-après les remarques & la ſcholie.

foudivise l'un & l'autre, plus ils se rapprochent, & qu'il faut qu'ils se réunissent au cercle si exactement qu'ils ne deviennent qu'un seul & même polygone : mais on a cru que la progression de ce rapprochement s'étendoit à l'infini; ce qui cependant n'étoit pas facile à comprendre; car ce rapprochement étant réciproque de part & d'autre, doit avoir nécessairement un terme, comme les branches d'un compas, qu'on pousse également pour les fermer, se réunissent au milieu *q* de l'angle supposé BED, que fermeroit leur ouverture : ce milieu est le terme où elles ne peuvent pas manquer de s'arrêter, & qu'elles ne peuvent passer; ainsi ce terme n'a pas besoin d'être cherché par le calcul; il est connu & décidé par lui-même. L'exemple de l'asymptote avec l'hyperbole n'a pas lieu ici, où le rapprochement vers le rayon diamétral est réciproque & égal de part & d'autre, & où il y a un terme fixe; la comparaison seroit absurde.

Ce milieu, ou ce terme du rapprochement, est le rayon intellectuel diamétral, commun aux deux angles, l'inscrit & le circonscrit : c'est ce rayon diamétral intellectuel qui est la clef de la voûte qui assure toute la construction de l'édifice; c'est à l'extrêmité de ce rayon où se réu-

nissent en un point géométrique, l'arc géométrique, sa corde géométrique, & sa tangente géométrique, & où sont compris l'arc intellectuel, sa corde intellectuelle, & sa tangente intellectuelle, qui sont indéterminables; mais toutes les soudivisions d'un polygone se font par moitié; c'est-à-dire, par parties aliquottes; & une partie aliquotte est elle-même une unité, qui se prête à d'autres soudivisions jusqu'à l'unité imperceptible *.

Ainsi les sous-divisions d'un polygone divisent toute la circonférence du cercle en unités: or, comme ces soudivisions peuvent être poussées jusqu'à l'imperceptible, elles ne peuvent pas manquer d'arriver à l'unité géométrique, où le polygone inscrit & le polygone circonscrit se réunissent en un seul & même polygone, sans pouvoir ensuite se désunir ni passer ce terme d'unité géométrique, où la portion d'arc & sa corde peuvent être réduites à un point, à un demi-point, à un quart de point géométrique, &c, à l'endroit où le rayon diamétral presqu'imperceptible, ou même imperceptible d'un angle, coupe par moitié cette portion d'arc & sa corde en parties aliquottes, qui

* Voyez le Corollaire de la Trisection, page 9.

ſont toujours des unités par leſquelles le calcul peut toujours arriver à un compte juſte.

Si on a perdu de vue l'unité intellectuelle, c'eſt qu'on a cherché dans l'infini ce qui n'eſt pas infini, & qu'on a été conduit là par l'idée indéterminée d'une abſtraction métaphyſique, qui a jetté dans un calcul, en parties aliquantes, qui ne peut pas former un compte juſte en rigueur géométrique, ni en rigueur intellectuelle; mais ſi on n'avoit pas pris la conſéquence pour le principe, c'eſt-à-dire, ſi on n'avoit pas pris une ſimple perception d'induction indéterminable pour une baſe géométrique, & qu'on eût bien reconnu que *la Métaphyſique n'eſt qu'une phyſique indéterminée*, on ne ſeroit pas tombé dans cet incalculable, qu'on appelle fauſſement incommenſurable, & on auroit trouvé ſûrement & évidemment ce qu'on cherchoit, même juſqu'à l'exactitude la plus ſcrupuleuſe, aſſurée en toute rigueur géométrique, & on n'auroit pas admis des incommenſurables en géométrie; parce que le compas tranche net, & n'eſt point aſſujetti aux fractions irrationnelles ni aux inſuffiſances arithmétiques & algèbriques, qui forment des impoſſibilités étrangères à la Géométrie, & dont on la

débarrassera lorsqu'elle ne sera plus précédée dans ses recherches par le calcul & par la Métaphysique ; car les nombres des mesures doivent être établis géométriquement, & être apperçus avant que de les compter, & il faut aussi que les rapports décisifs des mesures soient trouvés géométriquement avant que d'en tirer des inductions métaphysiques imperceptibles, qui excluent toute évidence, & déconcertent la raison, parce qu'on renverse l'ordre physique qui assure nos connoissances ; c'est-à-dire, lorsqu'on prend, comme nous l'avons dit, la conséquence pour le principe. Sans le point géométrique, on n'auroit aucune indication ni perception intellectuelle des points ni des lignes mathématiques ; c'est donc renverser l'ordre que de prendre pour principes ces lignes & ces points indéterminables, qui ne sont indiqués intellectuellement que par les points & les lignes géométriques. C'est dans ce renversement que consistent tous les tours d'adresse des Sophistes & des Pyrrhoniens, pour éluder l'évidence qui caractérise la certitude des vérités physiques ; & c'est par le redressement de cet ordre, qu'on doit suivre dans la recherche de la vérité, que les vrais Philosophes les soumettent à l'évidence par l'assentiment général

général des hommes clair-voyans qui respectent la vérité.

REMARQUE.

Si on suppose la circonférence du cercle divisée en 60 parties égales, chacune de ces parties répondra par 6 degrés à chaque division de la diagonale en 24. On pourroit, en oubliant que l'arc d'une 60me partie de la circonférence est tel qu'il se trouve confondu avec sa corde, on pourroit, dis-je, objecter que cet arc étant de six degrés, peut être divisé en six parties, dont les six cordes ensemble seroient plus grandes que la corde de l'arc total.

Pour dissiper cette objection, on peut s'attacher à une idée plus précise de l'immersion d'un arc dans sa corde, en supposant un polygone de 180 côtés, & une division de la diagonale en 72 parties: alors chaque division de la circonférence sera de deux degrés qui se trouveront couverts par la corde de l'arc total, considéré comme une ligne droite géométrique, & cette corde se trouvera égale à chacune des parties de la diagonale ; car la diagonale sera égale à 144 degrés de la circonférence du cercle ; or, deux

fois 144 font 288, c'eſt-à-dire les quatre cinquièmes de la circonférence du cercle.

Le diamètre du cercle ſera à ſa circonférence comme 114 à 360; c'eſt ſix degrés de moins que le tiers de la circonférence; les cinq ſixièmes de la diagonale ſont égaux à 120 degrés qui ſont exactement le tiers de la circonférence; car trois fois 120 font 360.

Le côté du quarré ſera à ſa diagonale, comme 51 à 72 : deux fois 51 degrés font 102, qui, pris quatre fois, font 408 pour les quatre côtés du quarré.

Archimède a pris pour la totalité de la circonférence, meſurée par ſes degrés, trois diamètres & un ſeptième de diamètre; ce qui ne donne que 358 degrés & environ un tiers, au lieu de 360 degrés, car le ſeptiéme du diametre, qui n'eſt que de 114 degrés, eſt 16 degrés & environ un tiers; or nous avons dit qu'il falloit 18 pour arriver de 342 à 360 : ainſi, par le calcul d'Archimede, il manque environ 2 degrés moins un tiers; d'où réſulteroit, par exemple, une erreur d'environ 40 lieues pour le cercle de l'Equateur de la terre. Si on calcule la ſurface d'un cercle par le quarré de la quadrature d'Archimede,

le produit ſera à peu près conforme à celui de la demi-circonférence du cercle meſurée par ſes degrés & multipliée par le rayon : mais cette meſure par degrés n'eſt pas celle de la vraie déployée d'une circonférence, puiſque la courbure de l'arc de chaque degré n'y eſt pas déployée ; ce qui doit faire douter qu'on ſoit, par le calcul, arrivé auſſi près qu'on le croit de la quadrature du cercle, & qu'à cet égard il n'y ait rien à deſirer de plus pour l'uſage des opérations géométriques : on pourra appercevoir au contraire que la Géométrie démonſtrative reſtera toujours imparfaite, tant qu'on ne ſe conformera pas aux meſures géométriques des conſtructions déciſives de la quadrature du cercle.

Cependant on peut reconnoître par la multiplication de la demi - circonférence du cercle par le rayon, ainſi que par celle du quarré, qui eſt réformé ici, que la vraie déployée eſt à la circonférence comme 365 $\frac{3}{57}$ à 360. La demi-circonférence étant multipliée 182 $\frac{30}{57}$ par 57, le produit ſera 10404 ; ainſi que le produit du côté du quarré multiplié par lui-même ; car 102 multiplié par 102 donne auſſi 10404, comme la moitié de la circonférence déployée multipliée par le rayon.

Mais de tout tems on a regardé comme impossible de trouver le rapport exact du diamètre avec la circonférence du cercle, & de pouvoir faire une construction géométrique où les mesures du quarré & du cercle pussent être assujetties aux degrés de la circonférence du cercle, & aux divisions de la diagonale du quarré.

On a depuis eu recours en vain au fameux calcul intégral, calcul aussi imparfait que borné, & peu appliquable à la Géométrie, pour parvenir à une unité numérique qui seroit le point mathématique idéal que l'on vouloit trouver : mais il seroit encore impossible, quand on parviendroit à une équation qui donneroit cette unité numérique, de démontrer que cette unité fût réellement le point mathématique idéal, qui restera toujours inconnu. On a négligé le point géométrique, qui est le dernier terme décisif des mesures géométriques, & on a pris une fausse route, celle de l'infini, où l'on ne rencontre que des difficultés invincibles.

SCHOLIES.

1°. Comment êtes-vous assuré que le

diamètre du cercle est à la diagonale du quarré comme 19 à 24?

Par une démonstration semblable à celle qui a été établie (Pl. II.) pour prouver le rapport de la diagonale avec le côté du quarré, & par les degrés de la circonférence du cercle portés d'abord un à un, & doublés ensuite 2 par 2, &c. sur la diagonale du quarré.

2°. Pourquoi dites-vous que la diagonale du parallélogramme *a c n u* est égale au diamètre du cercle L?

C'est que *n y* qui est la moitié de *n c*; est rayon du cercle L transportée de *y* en *n*.

3°. Pourquoi dites-vous que le diamètre du cercle est au côté du quarré comme 19 à 17?

C'est que le côté du quarré est à la diagonale comme 17 à 24, & que le diamètre du cercle est à cette même diagonale comme 19 à 24.

4°. Comment pouvez-vous prendre un degré de la circonférence du cercle pour le porter sur la diagonale?

Par la méthode enseignée dans le Corollaire de la trisection de l'angle, où l'on propose de faire l'angle d'un pentagone.

Tel eſt l'angle A B C (Pl. IX.) dont l'arc A C eſt de 72 degrés.

Diviſez cet arc par moitié par le rayon B *e*.

La moitié A E de l'arc A C ſera de 36 degrés.

Diviſez ces 36 degrés en trois parties égales, dont chacune ſera de 12 degrés.

Diviſez une de ces trois parties en trois parties égales, dont chacune ſera de 4 degrés, que vous diviſerez & ſous-diviſerez par moitié; cette derniere ſoudiviſion vous donnera un degré.

Tirez la tangente A *c*, elle couvrira un degré de cercle à côté du rayon A B.

Marquez ce degré par un point.

Doublez ce même degré, & enfermez les deux dans un cercle.

Formez de ſuite ſur la ligne droite A*c* 36 petits cercles égaux au premier; vous aurez l'arc A C déployé par degrés ſur la ligne droite A*c*.

Du point A au point B décrivez l'arc B*b v*; *v* A ſera la meſure du rayon A B, qui ſera de 57 degrés; vous pourrez prendre de même ſur la ligne A*c* tout autre point que vous voudrez.

Ces démonſtrations une fois aſſurées ſuffiſent, & reſtent ſous-entendues pour les ſimples conſtructions pratiques de la quadrature du cercle.

Les degrés d'un arc meſuré ſur la ligne droite, ne doivent-ils pas être égaux à ceux qui ſont meſurés ſur la circulaire ?

Cependant on voit ici, par le produit du calcul du quarré & par le produit de celui de la demi-circonférence du cercle, que les degrés meſurés ſur la ligne droite ſont plus grands que ceux qui ſont meſurés ſur la circulaire : pourquoi cette différence ?

Voyez ci-devant, page 27, l'éclairciſſement ſur la courbure d'un arc immergé dans une ligne droite géométrique, vous concevrez que cet arc étant renfermé dans un cercle, la tengente intellectuelle de cet arc eſt le diamètre de ce petit cercle, & eſt plus longue que la corde intellectuelle de l'arc qui eſt renfermée dans le même cercle, & qui eſt éloignée à peu près du diamètre intellectuel de toute la largeur de la ligne tengente géométrique : or le diamètre eſt la ligne la plus longue qui puiſſe être enfermée dans un cercle; donc elle eſt plus longue que la corde en proportion de l'éloignement de l'une à l'autre; & on ne doit pas oublier que c'eſt dans la cour-

bure de l'arc que consiste l'égalité de la mesure d'un degré de circulaire avec la déployée de ce degré de circulaire, qui est plus longue que la corde de l'arc de ce même degré.

Fin des Recherches Philosophiques.



PROJET DE NOUVEAUX ÉLÉMENS *DE GÉOMÉTRIE.*

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES de Géométrie rendus sensibles par la construction des figures primitives, rapportées au cercle & à la ligne droite, & par l'explication détaillée des conditions qui constituent évidemment leur essence & leurs propriétés relatives à la Géométrie démonstrative & à la solution de divers Problêmes géométriques assujettis aux cas particuliers *.

* Ce sont la ligne droite & la ligne circulaire qui fournissent toutes les mesures géométriques, tant pour la construction des figures régulières que pour la solution des Problêmes particuliers ; & c'est par la construction des figures géométriques qu'on apprend à connoître les propriétés & l'usage de ces mesures.

On met tout d'abord la règle & le compas à la main

PROPOSITION I.

CONSTRUCTION d'un Cercle, & de son diamètre.

Cercle. *Centre.* *Ligne.* *Circonférence.* *Diamètre.*

DÉCRIVEZ un *cercle* qui ait son *centre* sur une *ligne* droite qui s'étende jusqu'à la *circonférence* du *cercle*, cette *ligne* sera ce que l'on appelle *diamètre* d'un *cercle*, & divisera le cercle par *moitié*; la *moitié* de ce *diamètre* s'appelle

des Elèves, sans débuter par des notions abstraites & générales, qu'ils ne conçevroient pas; il faut leur faire connoître les objets, avant que de leur en donner des définitions; il faut leur faire construire les figures, pour qu'ils les comprennent plus facilement, & pour leur apprendre les conditions qu'elles exigent pour être régulières: car, lorsqu'on connoît les conditions essentielles des formes géométriques, on possede le fond de la Géométrie, parce qu'on a appris à connoître les mesures géométriques & la manière de mesurer, & à comprendre la certitude de ces mesures, car en construisant exactement les figures géométriques, il faut nécessairement qu'on saisisse les rapports décisifs des mesures qui constituent la forme essentielle de ces figures; & plus on aura construit de figures primitives régulières, plus on sera avancé dans la connoissance des rapports décisifs des mesures géométriques. Cette méthode ne présente d'abord que de l'amusement, & leur évite la contention de l'esprit, qui fait naître du dégoût pour l'étude de la Géométrie: elle dégage la Géométrie d'une multitude de règles ou théorêmes inutiles, découpés & rebutans, qui dérangent la marche naturelle de l'étude de cette science. D'ailleurs ceux qui

Rayon. *rayon* : il s'étend du *centre* à la circonférence du *cercle*,

EXPLICATION.

Le *diamètre a c* coupe en deux parties égales ou en deux *demi-cercles* le *cercle* A.

Ainſi le *diamètre* eſt la plus grande *ligne* que l'on puiſſe tirer dans un *cercle*.

Point. Le *centre b* du cercle eſt le *point* milieu duquel la *circonférence* eſt décrite de la même ouverture de *compas*.

Ainſi cette *circonférence* eſt par-tout également éloignée du *centre*.

---

ne ſe deſtinent pas par état à cette étude, qui ne veulent pas ignorer ce que c'eſt que la Géométrie, & qui veulent comprendre ſes opérations & leurs uſages, n'y trouveront rien d'embaraſſant & ſeront guidés par les objets mêmes de cette Science, juſqu'au terme où ils voudront s'arrêter. Ce ſera auſſi une introduction complete très-ſimple & très-régulière pour ceux qui voudront étendre plus loin leurs connoiſſances, & exercer leur intelligence en Maîtres ſur la ſolution de tous les problêmes, qu'il faut réſoudre dans la pratique lumineuſe & générale de la Géométrique. *Voyez les Elémens de Géométrie de M. Clairaut, où la ſolution des Problêmes eſt démontrée immédiatement par les meſures primitives de la Géométrie ſans l'entremiſe des théorêmes, & ſans renvois qui fatiguent & déconcertent l'attention des Etudians, & font diſparoître dans la conſtruction des Problêmes la liaiſon des rapports déciſifs des démonſtrations, & l'ordre naturel de la théorie de la Géométrie. Cependant il ſeroit à ſouhaiter que ſa méthode fût plus démêlée & plus en ordre, & que les différens genres de Problêmes y fuſſent arrangés, intitulés, & numérotés diſtinctement : c'eſt une première ébauche, qui ne peut être portée à ſa perfection que par de Grands Maîtres.*

Les *rayons* ou les moitiés d'un *diamètre* s'étendent du *centre* à la *circonférence*.

Ainſi tous les *rayons* d'un *cercle ſont* égaux.

PROPOSITION II.

CONSTRUCTION *d'un Angle*, *d'un* TRIANGLE *iſoſcele*, *& de ſon* OPPOSÉ *au ſommet*.

TIREZ du *centre a* à la *circonférence* deux *diamètres d b* & *e c*.

Corde. Des *points b* & *c* tirez la *corde* de l'*arc b c*.

Arc. Tirez la *corde* de l'*arc d e*.

EXPLICATION.

Angle. Un *angle* eſt un eſpace renfermé entre deux lignes comme *e a* & *d a*, leſquelles ſe rencontrent en un point commun *a*, que l'on nomme ſommet. On appelle *triangle* un eſpace renfermé entre trois lignes qui forment trois angles, comme *d*, *e*, *a*.

Triangle.

Les deux côtés *a c*, *b a* du *triangle a b c* s'étendent du *centre* à la *circonférence*.

Ainſi ils ſont deux *rayons*; or

deux *rayons* d'un *cercle* ſont *égaux* ; donc le *triangle a b c* a deux *côtés* égaux ; c'eſt ce qu'on appelle *triangle iſoſcele*.

Triangle iſoſcele.

Les deux *côtés a e*, *d a* du *triangle d e a* s'étendent pareillement du *centre* à la *circonférence* ; donc ils ſont auſſi des *rayons*. Sa *baſe d e* eſt égale à la *baſe c b* du *triangle a b c* : donc ces deux *triangles* ſont égaux, & ont l'un & l'autre même baſe & même *hauteur*, & leurs *côtés* ſont des diamètres qui ſe croiſent en *a*, & forment des *angles* égaux oppoſés au *ſommet a* : de même les *angles e a b* & *d a b* ſont égaux, parce qu'ils ſont auſſi *oppoſés au ſommet*.

Baſe.

Côtés.
Hauteur.

Angles oppoſés au ſommet.

PROPOSITION III.

CONSTRUCTION d'une ligne perpendiculaire & d'un angle droit.

DU *point* C *décrivez* le *cercle* K à diſcrétion ; tirez le *diamètre* HI du *point* I pris pour *centre*, & d'une ouverture de *compas* plus grande que le *rayon* IC, décrivez le *cercle* G.

Du point H pris pour *centre*, ſans changer l'ouverture du compas, décrivez le *cercle* F.

Point de ſection.

Des *points de ſection* E & D, tirez la *ligne* E C D, qui coupera en deux parties égales la *ligne* H I.

EXPLICATION.

On appelle point de ſection le point où deux lignes droites ou circulaires ſe coupent. Les points A, C & petit *c* ſont des points de ſection.

L'*arc* I *a* eſt égal à l'*arc a* H; ainſi le *point a* eſt également éloigné du *point* I que du *point* H: donc la *ligne* E C ne panche ni d'un côté ni d'un autre vers la *ligne* H I; c'eſt ce que l'on appelle *ligne perpendiculaire.*

Ligne perpendiculaire.

Les quatre *angles a, b, c, d,* ſont *iſoſceles*, égaux, & coupent le *cercle* K en quatre parties égales.

Donc les *diamètres* H I & E D ſe coupent régulierement en croix ou à *angles droits* ou *angles rectangles.*

Angles droits ou Angles rectangles.

PROPOSITION IV.

CONSTRUCTION d'un Quarré inſcrit dans un Cercle, & du Triangle rectangle.

DANS le *cercle* B C D E élevez deux *perpendiculaires* l'une ſur l'autre, E C & B D, qui ſe coupent à *angles droits*, paſſant par le *point* A, centre du cercle B C D E.

Des *points* B & C tirez la *ligne* B C.

Des *points* C & D tirez la *ligne* C D.

Des *points* D & E tirez la *ligne* D E.

Des *points* E & B tirez la *ligne* E B.

EXPLICATION.

Quarré.

Triangle rectangle.

Les *lignes* B C, C D, D E & E B, qui ſont les côtés du *quarré*, ſont égales entr'elles; donc les quatre côtés qui forment le *quarré* ſont égaux; & ces *lignes* B C, C D, D E & E B ſont les *baſes* de quatre *triangles rectangles*. On appelle *triangle rectangle* tout *triangle* qui a un *angle droit*; tels ſont B A C & C A D & E A B : la *baſe* d'un *angle droit* s'appelle *hypothenuſe*.

hypothenuse. Ainsi les quatre *hypothenuses* BC, CD, DE, FB de quatre *angles droits*, qui se réunissent au *centre* d'un *cercle* où ils sont *inscrits*, forment un *quarré parfait*, & divisent la *circonférence* du *cercle* en quatre parties égales. On divise la *circonférence* du *cercle* en 360 *degrés*; donc le quart de cette *circonférence* est de 90 *degrés*; les deux *diamètres* EC & BD s'appellent les *diagonales* du quarré. Les côtés du quarré opposés l'un à l'autre, sont *paralleles*, c'est-à-dire, à la même distance l'un de l'autre dans tout leur trajet, fussent-ils prolongés à l'infini, parce que leurs distances sont réglées par les diagonales BD & CE, qui sont égales.

Angles inscrits.

Degrés.

Diagonales.

Paralleles.

PROPOSITION V.

CONSTRUCTION d'un Octogone ou Polygone de huit côtés inscrit dans un Cercle.

FAITES le *cercle* O, & établissez un *quarré* sur ses *diamètres* BD & EC qui se coupent à *angles droits* en A. Du

Du *point* B & de l'ouverture BF du compas priſe à diſcrétion, & du *point* E, ſans changer l'ouverture, faites la *ſection* F.

Du *point* F au *point* A tirez la *ligne* FA, prolongée en L.

Prenez la meſure BM, portez-la huit fois ſur la *circonférence* du cercle O, vous aurez les *points* B, M, E, K, D, L, C, I.

Tirez les *lignes* BM & ME & EK & KD & DL & LC & CI & IB.

EXPLICATION.

L'angle droit EAB eſt diviſé en deux parties égales par la *ligne* FA.

Ainſi la meſure EM étant répetée huit fois à la *circonférence* du *cercle* O donne un *octogone* ou *polygone de huit côtés*, dont les *triangles* de leur diviſion ſont égaux. Ainſi la *corde* de l'*arc* EM diviſe la *circonférence* du *cercle* O en huit parties égales qui ont chacune 45 *degrés*. La portion du *cercle* renfermée entre l'*arc* EMB & ſa *corde* EB s'appelle *ſegment*; c'eſt la même choſe que ce que l'on appelle vulgairement un *chanteau*, & l'angle EAB s'appelle *ſecteur*, ainſi que tout autre angle qui va du *centre* à la *circonférence*.

Octogone. Polygone.

Segment.

Secteur.

La *corde* EB de l'*arc* EMB forme avec la *ligne* FA quatre *angles droits* EGA, AGB, BGM, & MGE.

Hypothenuse. *Sinus.* La *ligne* MB est l'*hypothenuse* de l'*angle droit* BGM, & GB est le *sinus* de l'*angle droit* BGM, qui se termine à l'*extrémité* B de l'*hypothenuse* BM.

Apothême. La ligne *diamétrale* AG, qui est *perpendiculaire* à la corde EB, s'appelle *apothême.*

Le *diamètre* LM coupe par moitié l'*angle droit* EAB. Les deux *angles* EAG & IAB, qui sont moins ouverts chacun qu'un *angle droit*, s'appellent des *angles aigus*; l'*angle* KAB, qui est plus ouvert qu'un *angle droit*, s'appelle *angle obtus.*

Angle aigu. *Angle obtus.*

PROPOSITION VI.

CONSTRUCTION du Rhombe ou Lozange; du Rhomboïde régulier; du Rhomboïde irrégulier; du Trapèze & du Trapezoïde; du Triangle scalène, & du Triangle ambligone.

PARTAGEZ le *cercle* I en quatre parties égales par les deux *diamètres* BD & CE,

Prenez à discrétion la mesure D F plus courte que l'intervalle D C, portant sur le *diamètre* E C.

Portez cette mesure de D en F.

Du point B au point F tirez la ligne B F.

Du point F au point D tirez la ligne F D.

Du point D au point G tirez la ligne D G.

Du point G au point B tirez la ligne G B, vous aurez le *rhombe* ou *lozange* G B F D.

Rhomboïde régulier.

Tirez les deux paralleles D X & Z B; ou ce qui est le même :

Prolongez la ligne D F en Z.

Prolongez de même sa parallele B G en X, & vous aurez le rhomboïde régulier D X Z B.

Rhomboïde irrégulier.

Tirez à discrétion la *ligne* B H plus courte que B D.

Du *point* G au *point* H tirez la *ligne* G H.

Du *point* H au *point* F tirez la *ligne* H F.

Vous aurez les deux *côtés* G H & H F égaux, & les *côtés* G B & B F égaux & plus longs que G H & H F.

Trapeze.

Du point G prenez à discrétion la ligne GM plus courte que GB.

Portez cette mesure de F en L ; tirez la *ligne* LM, & vous aurez le *trapeze* GFML qui est un *triangle isoscele* tronqué par une *parallele* à sa *baze*.

Triangle ambligone. Le triangle FHG a un angle obtus, & s'appelle *triangle ambligone.*

Triangle scalène. Le triangle FHK, qui a ses trois côtés inégaux, s'appelle *triangle scalène.*

Trapezoïde.

Faites à discrétion la *ligne* FK plus courte que FG.

Du *point* K au *point* B tirez la *ligne* KB.

Du *point* K au *point* H tirez la *ligne* KH.

Vous aurez le *trapezoïde* HKBF, qui est un *quadrilatere* dont les quatre *côtés* sont inégaux.

EXPLICATION.

Rhombe ou Lozange. Le *rhombe* ou *lozange* a ses quatre *côtés égaux*, & seulement ses *angles* opposés égaux,

Les deux *angles* B & D sont *aigus*, & les *angles* G & F sont *obtus*.

Ses deux *diagonales* sont inégales; mais l'une & l'autre le divisent par moitié.

Rhomboïde irrégulier.

Le *rhomboïde irrégulier* a ses *côtés* opposés inégaux. Les côtés de son *angle* GHF sont égaux; & les côtés de son *angle* GBF sont égaux aussi : il est divisé en deux également par sa *diagonale* BH, & inégalement par sa *diagonale* GF.

Rhomboïde régulier

Quadrilatère ou figure de quatre côtés égaux ou inégaux.

Le *rhomboïde régulier* est un *quadrilatere irrégulier* qui a ses côtés opposés égaux & paralleles; ses angles opposés aussi égaux, & les quatre côtés inégaux, & dont les deux diagonales ne se coupent point à angles droits.

Le *quadrilatere* BFHK est un *quadrilatere* irrégulier qui n'a ni angles ni côtés égaux, & qu'on appelle *trapezoide*. Il differe du *quadrilatere* irrégulier, qu'on appelle *trapeze*, en ce que le *trapeze* a deux côtés opposés GM & LF égaux & les deux autres GF &

Trapezoïde.

Trapèze.

LM *paralleles* & inégaux; ainſi un *triangle iſoſcele* tronqué par une *parallele* à ſa *baſe*, eſt un *trapeze*.

Lignes paralleles. On appelle *paralleles* deux lignes qui ſont à égale diſtance l'une de l'autre, en ſorte qu'elles ne ſe rencontreroient pas quand elles ſeroient prolongées à l'infini.

PROPOSITION VII.

CONSTRUCTION d'une Equerre ou Angle droit ſur l'extrêmité d'une ligne droite; d'une Ligne tangente; d'un Cercle de deux Lignes paralleles, & d'un Parallélograme rectangle.

SOIT le *diamètre* A B la *ligne* donnée, à l'extrêmité de laquelle il faut élever une *perpendiculaire*. Des *points* A & B faites la *ſection* N & la *ſection* M; par les *points* N & M tirez la *ligne* C M prolongée vers E, coupant le *cercle* en D; des *points* E & C faites les *ſections* F & G; tirez la ligne F G.

Prenez la meſure C A, portez-la de A en I; tirez la *ligne* I A prolongée vers K, vous aurez A K *parallele* à E C, qui formera

un *angle droit* ſur l'extrêmité A de la *ligne* AB, & vous aurez l'*Equerre* IAC.

Tirez la *ligne* EK parallele à ID, & vous aurez le *parallélograme rectangle* KACE.

EXPLICATION.

La *ligne* AI, qui eſt élevée à l'extrêmité de la *ligne diamétrale* AB, forme un *angle droit* ou *equerre*, parce que AC eſt égal à ID, à AI & à CD; ainſi l'*angle* IAC eſt l'*angle* d'un *quarré* & par conſéquent un *angle droit*.

Equerre.

La *ligne* AI eſt égale au rayon CD, donc la ligne ID touche le *cercle* au *point* D; donc elle eſt *tangente* ou touchante du *cercle* L.

Tangente.

Les deux lignes AK & CE ſont *paralleles*, c'eſt-à-dire, partout également éloignées l'une de l'autre, parce que KE eſt égal à AC, ce qui meſure également leur diſtance en AC & en KE.

Le *parallelograme rectangle* ACEK eſt un *quadrilatere* qui a ſes deux côtés oppoſés KA & EC égaux entr'eux & ſes deux

Parallélograme rectangle.

autres côtés opposés A C & K F aussi égaux entr'eux, mais moins longs que les deux côtés K A & E C.

Les quatre angles A, E, K, C de ce quadrilatere sont droits, & leurs côtés sont paralleles; c'est pourquoi ce *quadrilatere* s'appelle *parallélograme rectangle.*

PROPOSITION VIII.

CONSTRUCTION pour retrouver le centre perdu d'un Cercle, ou d'une portion de Cercle, & pour faire passer un Cercle par trois points donnés, pourvu qu'ils ne soient point en ligne droite.

SOIT le *cercle* N, dont il faut retrouver le *centre*, posez à discrétion trois *points* B, C, D sur la *circonférence* du *cercle* N.

De ces trois points, & d'une ouverture à discrétion & toujours la même, faites les *sections* E, F, G, H.

Du point F au point G tirez la ligne F G prolongée jusqu'à la partie opposée de la circonférence.

Du point E au point H tirez la ligne E H prolongée de même.

Le point de *section* A sera le *centre* de la *circonférence* du cercle N.

EXPLICATION.

Les deux lignes FL & EM, qui coupent par moitié les arcs BC & CD entre les points donnés, se rencontrent au point A, & étant prolongées jusqu'à la circonférence du cercle N, forment deux diamètres : or ces diamètres passent par le centre du cercle à l'endroit où ils s'entrecoupent.

Donc le point A est le centre du cercle N.

PROPOSITION IX.

CONSTRUCTION *des Cercles concentriques, dont les divisions, faites par les rayons du Cercle, sont semblables ou omologues.*

DU point L pris pour centre, & de différentes ouvertures à discrétion, décrivez plusieurs cercles H, I, K, L.

Tirez les *lignes diamétrales* BE & CF & DG.

EXPLICATION.

Un *angle* se mesure par un *arc* décrit à volonté, & qui a pour centre le sommet

L, on forme le cercle L; du même centre L on décrit le cercle K, ensuite le cercle I & le cercle H; & l'angle BLG sera un angle au centre.

Donc l'arc GB qui le mesure, sera moitié de l'arc GC, qui mesure l'angle GLB moitié de l'angle obtus GLC.

Arcs omologues. Si on décrit plusieurs *arcs* sur un même *angle*, tous ces *arcs* auront le même nombre de degrés; c'est pourquoi on les appelle *omologues* ou *semblables*.

Les portions de cercle, qui sont divisées en GB, *p-m*, *s-n*, *t-p* par l'*angle* BGL, ont chacune même nombre de degrés du cercle dont elles sont portions; ainsi les divisions de chaque cercle, qui sont comprises dans l'*angle* BGL, & qui ont tous pour centre le sommet L de cet *angle*, sont des *arcs* qui sont tous *semblables* ou *omologues*.

PROPOSITION X.

CONSTRUCTION pour diviser une ligne droite en autant de parties que l'on veut.

SOIT la ligne CB que l'on veut diviser, par exemple, en trois parties égales.

Du point B & de l'ouverture C décrivez l'arc C G ; tirez la ligne B G.

Du point C & de l'ouverture B faites l'arc B L égal à l'arc C G; tirez la ligne L C.

Du point C portez à discrétion sur la ligne C L trois parties égales D, E, F.

Du *point* B sans changer l'ouverture du compas, portez sur la ligne B G trois parties égales K, I, H.

Tirez les *lignes* C H & D I & E K & F B, vous aurez la *ligne* C B partagée en trois parties égales *l m* & *m n* & *n o*.

EXPLICATION.

Les trois divisions établies sur les *lignes paralleles* C L & G B sont égales sur l'une & sur l'autre *parallele*.

Les *lignes* tirées d'une *parallele* à l'autre par chacune de ces divisions, divisent en passant la *diagonale* C B en trois parties égales.

PROPOSITION XI.

CONSTRUCTION des Angles internes & externes, de l'Angle au centre d'un Cercle ; & de l'Angle à la circonférence du même Cercle.

FAITES le cercle A, tirez le *diamètre* C B.

Du *point central* A faites à diſcrétion l'*angle aigu* D A E.

Du *point* A faites à diſcrétion l'*angle obtus* G A H. Tirez la ligne G B.

Tirez la ligne H B.

Vous aurez l'*angle* H B G, qui ſera un *angle* à la *circonférence*, & qui ſera *aigu* & moitié de l'*angle* au *centre* G A H, qui eſt un *angle obtus*.

Tirez les lignes D B & E B & la corde C D.

Diviſez la ligne D B en deux parties égales en F.

Tirez la ligne A F qui diviſe le *triangle* D B A en deux *triangles iſoſceles* égaux A D F & A B F qui, pris enſemble, ſont égaux au *triangle* C A D.

Diviſez la ligne H B en deux parties égales en I.

Tirez la ligne A I, qui diviſe le *triangle* H A B en deux *triangles* iſoſceles égaux H A I & A B I qui, pris enſemble, ſont égaux au *triangle* C A H.

EXPLICATION.

Angle interne. *Angle externe.*

On appelle *angle interne* l'angle D B A, & *angle externe* l'angle D A C, parce que celui-ci eſt dehors du premier, & que ſon côté C A eſt une continuation du côté A B de l'*angle* D A B.

Le *triangle* D A C est égal au *triangle* D B A, & double du *triangle* F B A, parce que sa *base* C D est double de F A.

C'est pourquoi l'*angle interne* est toujours égal à son *externe* L'*angle* D B C, qui a son *sommet* à la *circonférence du cercle*, est équivalent à la moitié de l'*angle au centre* D A C, qui a moitié moins de hauteur. Par exemple, l'*angle* H A G est un *angle obtus* double de l'*angle* H B G, qui est un *angle aigu* qui est double de hauteur, & qui est mesuré par la moitié des degrés de l'*arc* qui les supporte.

Angle à la circonférence.

Angle au centre.

Ainsi, supposons que l'*arc* de l'*angle* obtus au centre fut de 110 degrés, l'*arc* qui supporte l'agle aigu à la circonférence n'en aura que 55, quoiqu'il soit le même que celui de l'angle obtus au centre.

La raison de cette différence, est que le sommet de l'angle au centre étant transporté à la circonférence, se trouve éloigné des extrêmités de l'arc qui le supporte de toute la longueur d'un rayon, & alors le nombre des degrés de cet arc diminue en raison de ce que le sommet de l'angle à la circonférence s'éloigne de celui de l'angle au centre. Or il en est une fois

plus éloigné ; donc le nombre des degrés doit être une fois moins grand ; ce que l'on comprendra facilement, si, du point B pour centre ou point A on décrit un cercle qui sera égal à celui qui a son centre en A, la portion d'arc de ce nouveau cercle, qui sera comprise entre les lignes GB & CB, ne sera que la moitié de l'arc CG.

PROPOSITION XII.

CONSTRUCTION de la Trisection de l'Angle ; du Triangle équilatéral, & de l'exagone.

SOIT PCO l'angle donné pour être divisé en trois parties égales.

Divisez cet angle en deux parties égales par la ligne diamétrale CV.

Du point C pris pour centre, décrivez le demi-cercle IRLF plus ou moins grand, selon que vous voudrez que votre figure soit plus ou moins grande.

Tirez sa corde IF perpendiculairement à la diamétrale CV.

Divisez-la en trois parties égales IM & MN & NF.

Tirez la ligne HG, plus ou moins éloignée à discrétion, mais parallele & égale à la corde IF.

Du point F tirez la ligne F G parallele à la diamétrale C U.

Tirez sa semblable I H.

Du point M tirez la ligne M O parallele à la diamétrale C U.

Tirez sa semblable N P.

Prenez la mesure C *o*, portez-la de N en Q, & décrivez l'arc Q S.

Portez la même mesure de M en K, & décrivez l'arc T K.

Tirez la ligne T S, qui sera divisée en trois parties par les lignes M *o* & N *p*.

Du point C au point Q décrivez l'arc D Q K E, qui mesure l'angle donné D C E.

Tirez la corde D E.

Du point C tirez le rayon C K & le rayon C Q, qui divisent l'angle donné C D E en trois parties égales.

Tirez la ligne T *ff* parallele au rayon C Q, la ligne C *ff* sera égale à T Q, à D *a* & à *a* K, qui est parallele & égale à Q D, & qui forme le losange D Q *K a*.

EXPLICATION.

La condition essentielle de cette construction, est que les deux divisions Q & K de l'arc D Q K E soient déterminées par la ligne C *o* portée de M en K & de N en Q sur les deux paralleles M Q & N K; ainsi

la portion M N de la corde I F ſera egale à chacune des trois parties T Q & Q K & K S de la ligne T S qui eſt diviſée conjointement avec l'arc D *d* E, en trois parties égales par les deux paralleles Q M & K N ; ce qui prouve déjà que deux paralleles à la diamétrale C *d* peuvent diviſer une *droite* & une *circulaire* enſemble en un même nombre de parties ſemblables.

Triſection de l'angle.

L'*angle* donné eſt ici un *quart de cercle* dont la *triſection* eſt connue par des meſures qui lui ſont particulieres, & qui ſont connues de tous les Géomètres. Ils prennent la meſure du rayon D C, ils la portent de D en K & de E en Q, & la triſection eſt faite; mais toujours faut-il que, dans cette *triſection* du *quart de cercle*, & dans toute autre, la ligne C *ff* ſoit égale à chacun des quatre côtés du lozange D Q *k* *æ*, parce que la ligne *ff* C égale à D *a* & à T Q eſt une des deux *proportionnelles* requiſes pour la *triſection* de *l'angle*, & dont la moitié M C eſt la meſure de l'autre *proportionnelle* qui eſt égale à la ligne Q *d* : or ces deux *proportionnelles* ſont les mêmes que M N & C N; donc la ligne M N eſt commune

Proportionnelles.

à

à toutes les autres mesures de la *trisection*, qui sont égales entr'elles; ce qui peut être démontré de bien des manieres.

Nota. Cette construction ne s'étend pas plus loin que le *quart de cercle*. Si l'*angle* donné étoit plus ouvert que l'*angle droit*, il faudroit faire la construction sur la moitié de cet angle donné; ce qui revient au même; parce que les mesures de la moitié de l'*arc* étant doublées, donnent les mesures de l'*arc entier*.

COROLLAIRE.

CONSTRUCTION de la division géométrique du Cercle en 360 degrés.

L'arc d'un angle d'un *décagone* ou polygone de dix côtés, est de 36 degrés. Divisez cet arc en trois, vous aurez douze degrés: soudivisez encore en trois parties ces douze degrés, chaque partie de cette soudivision sera de quatre degrés, qui, divisés par moitié donnent deux degrés, qui, divisés aussi par moitié, donnent la mesure d'un degré. Ainsi la *quadrature du cercle* est aussi un corollaire de la trisection de l'angle & de la construction des polygones primitifs.

Quadrature du Cercle.

Triangle équilatéral. Exagone.

Le triangle équilatéral & l'exagone inscrits dans le cercle Y.

Divisez par moitié le rayon *dc*; tirez par cette division la ligne F E, elle sera un des côtés du *triangle équilatéral f e g*. Ce triangle a tous ses angles aigus; & tout triangle qui a tous ses angles aigus, s'appelle *oxigone* : l'arc Q E sera l'arc d'un angle de l'*exagone* ou *polygone* de six côtés.

Triangle oxigone.

PROPOSITION XIII.

CONSTRUCTION *du Décagone & du Pentagone, établie sur un quart de cercle & qui convient à la construction des Polygones primitifs.*

FAITES l'angle droit L B H & sa diamétrale B F.

Décrivez le demi-cercle *j e h* plus ou moins grand, selon que vous voudrez que votre figure soit plus ou moins grande.

Tirez sa corde *j h* perpendiculaire à la diamétrale B F.

Divisez-la en trois parties égales *j q*, *q p*, *p h*.

Du point *j* élevez la perpendiculaire *j* T, parallele à la diamétrale.

Elevez de même les perpendiculaires *q* U, *p* S, *h* R paralleles à la diamétrale B F.

Prenez la mesure B W, portez-la de *q* en *r* sur la parallele *p* S.

Faites l'arc *c v*.

Tirez la ligne *v &c.* égale & parallele à la corde *j h*, elle sera partagée en trois parties égales par les deux paralleles *q* U, & *p* S.

Du point B au point *r* décrivez l'arc L *r* H.

Tirez sa corde L H.

Divisez en cinq parties égales la moitié *v* N de la ligne *v &c.*

Prenez une de ces cinq parties, portez-la de N en *t* sur la ligne *v &c.*

Du point *t* au point *g* tirez la ligne *t g* parallele à la diamétrale B F.

Prenez sur l'arc L *r* H la mesure *o t*, portez la quatre fois en commençant par H, sur le même arc jusqu'en *t*, tirez la ligne B *t*, vous aurez l'angle du *décagone* ou *polygone* de dix côtés.

Décagone.

Doublez l'arc H *t*, vous aurez l'arc H G, qui sera l'arc d'un angle de *pentagone* ou *polygone* de

Pentagone.

cinq côtés G H, H I, I L, L M, M G, inſcrit dans le cercle A.

EXPLICATION.

Les deux paralleles *q* U & *p* S renferment le tiers du quart de cercle L H, dont la triſection eſt connue : ces paralleles renferment auſſi le tiers de la ligne *v*, *&c.* qui partage en trois parties égales le quart du cercle. Donc un arc peut être diviſé en trois par la ligne *v &c* & par deux paralleles à la diamétrale B F.

Donc le tiers de l'arc O H renfermé entre la diamétrale B O & ſa parallele *p* S peut être diviſé par d'autres paralleles en autant de parties que l'on voudra, qui ſeront meſurées par un pareil nombre de diviſions de la ligne N *r* compriſe entre la diamétrale & la parallele *p* S, parce que le tiers de l'arc O H renfermé entre la diamétrale B O eſt meſuré lui - même par deux paralleles, & par cette ligne N *r* ; par conſéquent toute autre parallele à la diamétrale placée entre la parallele *p* S & la diamétrale B O diviſera en même raiſon le tiers de l'arc O H & la ligne N *r*, qui ſont compris tous deux entre la diamétrale B O & la parallele *p* S : mais ces paralleles ne peuvent pas renfermer plus du tiers de l'arc

OH; ce tiers peut être même le ſixiéme d'un demi-cercle dont la triſection eſt connue : au-delà de ce ſixiéme, la courbure de l'arc total ſe refuſe à ce genre de diviſions; mais une de ces diviſions peut être appliquée à l'arc total, & le diviſer en autant de parties que la ligne *v &c.* ſera diviſée, pourvu que la diviſion ſoit priſe ſur l'arc entre la diamétrale & la parallele *p* S qui y marque cette diviſion; car une partie ainſi diviſée eſt toujours plus petite ſur la ligne *v &c* que ſur l'arc, quoiqu'elle ſoit toujours en même proportion ſur l'une que ſur l'autre, puiſqu'une de ces diviſions peut s'étendre juſqu'au tiers de l'arc, & conjointement juſqu'au tiers de la ligne *v &c.*

Il faut faire ici un petit calcul : la moitié de la ligne *v &c* eſt diviſée en cinq; c'eſt comme ſi toute cette ligne étoit diviſée en dix parties qui doivent correſpondre à un *polygone* de dix côtés, de maniere que chaque arc des dix angles de ce *Polygone* ait quatre parties; car chaque quart de cercle doit avoir deux angles & demi de *décagone*, qui font dix angles pour le cercle entier.



PROPOSITION XIV.

CONSTRUCTION de la diviſion géométrique d'un angle donné, en autant de parties qu'on voudra; & de la diviſion géométrique d'un cercle en 360 degrés.

PRENEZ la meſure de l'angle du pentagone précédent, qui doit être ici l'angle donné.

On prend cette meſure ſur cet angle du pentagone précédent, en décrivant l'arc *k l* que vous ferez ici à même hauteur; cet arc ſera coupé par moitié par la diamétrale de l'angle du pentagone.

Soit *o* A N l'angle donné. Du point A faites à diſcrétion le demi-cercle E C.

Partagez le diamètre E C en trois parties égales D, B, C.

Elevez les perpendiculaires E F & D Q & B T & C G.

Prenez la meſure A *h*.

Portez cette meſure de B en l.

Faites l'arc *l* O.

De D en M, ſans changer l'ouverture, décrivez l'arc M X.

Tirez la ligne X O,

Du point A & de l'intervalle *l* faites l'arc de l'angle donné *o l* M N.

Partagez la ligne X O en neuf parties égales.

Prenez la meſure d'une de ces parties ; portez-la de R en S ſur la ligne O X.

Prenez la meſure de l'hypothenuſe *r* S.

Portez-la neuf fois ſur la portion de cercle N *o*.

Vous aurez l'angle du pentagone diviſé en neuf parties égales, de chacune huit degrés.

Diviſez une de ces neuf parties *f* N en deux également, & la moitié par moitié, & la derniere moitié auſſi par moitié; vous arriverez par ces diviſions à un degré.

EXPLICATION.

L'angle d'un pentagone eſt de 72 degrés ; ainſi ſon arc diviſé en neuf donne huit dégrés par chaque diviſion ; car neuf fois huit ſont 72, & les neuf diviſions de l'arc d'un pentagone ſont pour la totalité du cercle un polygone de 45 côtés, & les arcs des angles de ce Polygone ſont de chacun huit degrés : ſi on diviſe par moitié ces arcs, on aura un polygone de 90 côtés, & les arcs de ſes angles auront chacun quatre degrés, & ſi on diviſe ces arcs par moitié, on aura

un polygone de cent quatre-vingt côtés, & les arcs de ſes angles étant diviſés par moitié donneront un polygone de 360 côtés, & les arcs de ſes angles auront chacun un degré.

PROPOSITION XV.

CONSTRUCTION *de la transformation géométrique du Cercle en Quarré & du Quarré en Cercle ; (nous diſons Transformation géométrique ; pour la diſtinguer de la prétendue quadrature métaphyſique du Cercle, qui n'eſt pas du reſſort de la Géométrie.)*

FAITES le cercle L.

Tirez les quatre diamètres A O, D B ; *m m*, *p q*, qui partagent la circonférence du cercle en huit parties égales.

Du point B & de l'ouverture E faites la portion de cercle G E F.

Prenez la meſure G F, portez-la de B ſur le diamètre B D au point *œ*.

Prenez la meſure B D, portez-la de *œ* en *d* ſur le même diamètre prolongé.

Du point E & de l'ouverture *d* faites le cercle K.

Des points *a*, *b*, *c*, *d*, où les deux diamètres prolongés coupent le cercle K, tirez les lignes *a c*, *c b*, *b d*, *d a*.

Partagez la diagonale *c d* en trois parties égales par les cercles M, N, O.

Tirez le diamètre perpendiculaire du cercle M, vous aurez la partie 20 de la diagonale.

Partagez la moitié de la diamétrale de ce cercle en quatre parties égales, vous aurez les parties 19, 18, 17, 16 de la diagonale du quarré.

L'intervalle du point *d* à la partie 19 de la diagonale ſera égal au diamètre du cercle L.

Du point *d* au point *a* faites la portion de cercle *a* 17 *b*.

La partie 17 de la diagonale ſera égale au côté du quarré.

Si vous voulez transformer le *quarré* en *cercle*, tirez les diagonales du parallélograme rectangle *c*, *a*, *n*, *n*.

Chacune de ſes diagonales ſera égale au diamètre du cercle L.

De la ſection *y* des diagonales, à l'extrêmité de la diagonale *c* faites le cercle B, il ſera égal au quarré dont le parallélograme eſt moitié.

Son diamètre ſera égal au diamètre du cercle L ; par conſéquent ces deux cercles

seront égaux, & donneront l'un & l'autre le même quarré que par la construction précédente.

EXPLICATION.

Toutes les parties de cette construction naissent les unes des autres, & se mesurent réciproquement les unes par les autres.

Le diamètre donne la diagonale ; la diagonale donne le rapport du diamètre avec la circonférence du cercle.

Elle donne aussi le quarré.

Le quarré donne le rapport numérique de son côté avec la diagonale.

Les 24 divisions de la diagonale répondent aux divisions d'un polygone de 60 côtés, qui divise la circonférence du cercle en 60 parties égales.

Donc les vingt parties de la diagonale du quarré, sont à la circonférence comme 20 à 60.

La moitié de la diagonale a 12 divisions; ainsi elle est le cinquiéme du polygone de 60 côtés; car cinq fois 12 font 60.

Les divisions du polygone de 60 côtés sont de 6 degrés; car 6 fois 60 font 360; donc les 24 divisions de la diagonale sont chacune aussi de 6 degrés.

Les douze divisions de la demi-diagonale

ſont égales à 72 degrés, & égales à deux cinquiémes du polygone de 60 côtés, qui ſont 144 degrés.

Le diamètre eſt à la diagonale comme 19 eſt à 24 : or 19 multiplié par 6 donnent 114.

Ainſi il s'en faut de ſix degrés qu'il ſoit égal au tiers, parce que trois fois 114 ne font que 342 : donc il y a un *deficit* de 18 qui, partagés en trois ſont ſix pour le diamètre.

Mais ſi, au lieu de 19 diviſions, vous en mettez 20, & que vous multipliiez 20 par 6 vous aurez 120; or trois fois 120 font 360 : ainſi les trois diviſions contiennent le diamètre

Supplément. & ſon *ſupplément* de ſix degrés ; par conſéquent le diamètre avec ce *ſupplément* eſt égal à un tiers de la circonférence du cercle.

PROPOSITION XVI.

CONSTRUCTION de la moyenne Proportionnelle égale au côté du quarré d'un Cercle donné.

SOIT le cercle Z dont on a tiré les deux diamètres AR, PT, qui ſe coupent à angles droits.

Du point R & de l'intervalle E faites la portion de cercle H E I.

Prenez la meſure H I.

Portez-la de R ſur le diamètre R A au point 19.

Prenez la meſure A R, portez-la de 19 en K.

Du point E au point K faites le grand cercle L.

Diviſez la ligne L K en trois parties égales.

Partagez la derniere diviſion L 16 en deux parties égales.

Le milieu *f* ſera le point 20 de la ligne L K.

Prenez cette meſure K 20, portez-la trois fois ſur la ligne A B.

Diviſez la ligne A B en deux parties égales A C & C B.

Diviſez la ligne A C en deux parties égales.

Du point F & de l'intervalle A F faites la portion de cercle A M C, coupant au point M la ligne P T prolongée vers N.

Diviſez la ligne E C en deux parties égales.

Du point G milieu de cette ligne, & de l'intervalle A faites le demi-cercle A N O.

Du point M au point A tirez la ligne A M, elle sera égale à la ligne E N côté du quarré égal au cercle Z.

Partagez le quarré en deux parties égales.

Faites le parallélograme rectangle *a b* Q Y.

Tirez les deux diagonales *a* Y & *b* Q, se coupant au point C.

Du point *c* & de l'ouverture *a* faites le cercle *a b* Y Q.

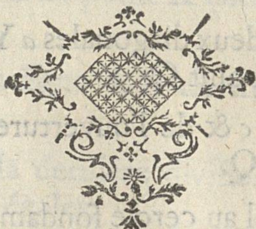
Il sera égal au cercle fondamental Z, & les diagonales seront égales au diamètre A R.

Cette derniere construction a besoin d'être démontrée; ainsi elle doit être renvoyée au troisiéme Chapitre des *Problêmes*. On ne la place ici que pour montrer la conformité de ses rapports avec ceux de la construction précédente.

Tirez dans le quarré les deux diagonales E Y & N Q.

Du point de section D pris pour centre décrivez le cercle F, qui sera égal au cercle Z.

Donc ici les mesures du *cercle* & du *quarré* sont les mêmes que dans la construction précédente.





PROJET DE NOUVEAUX ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

SECONDE PARTIE.

PROBLÈMES ou ſolutions des différens cas géométriques, propoſés ſelon des circonſtances déterminées & des meſures données : Ce qu'il faut trouver & démontrer directement par les rapports déciſifs des notions & figures primitives géométriques & évidentes par elles-mêmes, afin d'éviter les notions indéterminées, la multiplicité inutile des règles factices, les fauſſes applications du calcul & les renvois qui embarraſſent les Eleves dans l'Etude de la Géométrie, & qui obſcurciſſent la théorie de cette ſcience.

Les Problèmes peuvent ſe réduire à ſept Chapitres.

CHAPITRE PREMIER.

Construction des figures géométriques sur des mesures données.

CHAPITRE II.

Les Polygones inscrits & circonscrits au Cercle.

CHAPITRE III.

La transfiguration des plans, en conservant leur même étendue de surface.

CHAPITRE IV.

Additions & retranchemens aux plans, avec leurs rapports correlatifs.

CHAPITRE V.

Des mesures des périmètres, & des surfaces des plans.

CHAPITRE VI.

De la Trigonométrie.

CHAPITRE VII.

Des Problêmes solides ou de trois dimensions.

CHAPITRE PREMIER.

CONSTRUCTIONS des figures géométriques ſur des meſures données.

PROBLÊME I.

Conſtruire un triangle équilatéral ſur une meſure donnée.

SOIT A B la ligne donnée.

Du point A & de l'intervalle A B.

Du point B, & du même intervalle, faites la ſection *c*.

Tirez les lignes A C & B C.

DÉMONSTRATION.

Tirez les diamétrales A G & B F & C E.

Du point de ſection D à un des angles A décrivez le cercle A B C, qui donnera à chacun des côtés du triangle un arc de 120 degrés. Donc les trois côtés de ce triangle ſont égaux.

PROBLÊME II.

Conſtruire un Triangle équilatéral ſur le tiers d'une ligne donnée.

SOIT E D la ligne donnée.

Diviſez-la en trois parties égales en AB;

Du point A & de l'ouverture A B, faites le cercle G.

Du point B, & de la même ouverture de compas, faites le cercle E.

Du point C au point A tirez la ligne A C.

Du point C au point B tirez la ligne C B.

DÉMONSTRATION.

Les trois côtés du triangle A B C ſont des rayons de deux cercles égaux E, G, qui ſe croiſent de la circonférence au centre : or les rayons de cercles égaux ſont égaux : Donc les trois côtés A B & C B & C A ſont égaux. Deux cercles qui ſe croiſent de la circonférence au centre, partagent en trois parties égales la ligne qui va de leurs centres à leurs circonférences ; ainſi le triangle équilatéral eſt établi ſur le tiers de la ligne F D.

PROBLÊME III.

Former un quarré ſur la baſe du Triangle A B C, *qui ait chacun de ſes côtés égaux à chacun des côtés du Triangle* A B C.

PROLONGEZ la baſe A B juſqu'au cercle

G en H, & jusqu'au cercle E en F.

Cette ligne sera triple de la base A B.

De l'extrêmité A de cette base, élevez une perpendiculaire, qui coupera par moitié le demi-cercle en L.

De l'extrêmité B élevez une perpendiculaire, qui coupera par la moitié le demi-cercle en I.

Tirez la ligne L I aux points où les perpendiculaires coupent les cercles.

Or le côté A L & le côté B I du quarré sont des rayons.

Les côtés du triangle sont aussi des rayons : donc les côtés du quarré & les côtés du triangle sont égaux.

PROBLÊME IV.

Sur une Diagonale donnée G I faire deux Quarrés, dont l'un soit inscrit & l'autre circonscrit à un même Cercle.

CONSTRUCTION

SOIT la ligne G I la diagonale donnée.

Divisez-la en deux également par la ligne H F égale à G I.

Tirez les lignes H I & I F & F G & G H.

Divisez un des côtés quelconque comme G H, en deux également par la ligne F E.

Du point E & de l'intervalle EF pour rayon décrivez le cercle A B C D.

Tirez les lignes A B & B D & D C & C A.

DÉMONSTRATION.

Les côtés du quarré H I F G sont des tangentes du cercle A B C D.

Et les côtés du quarré A B C D sont des cordes d'arcs de 90 degrés du même cercle ; ainsi le premier est circonscrit, & le second inscrit au même cercle A B C E.

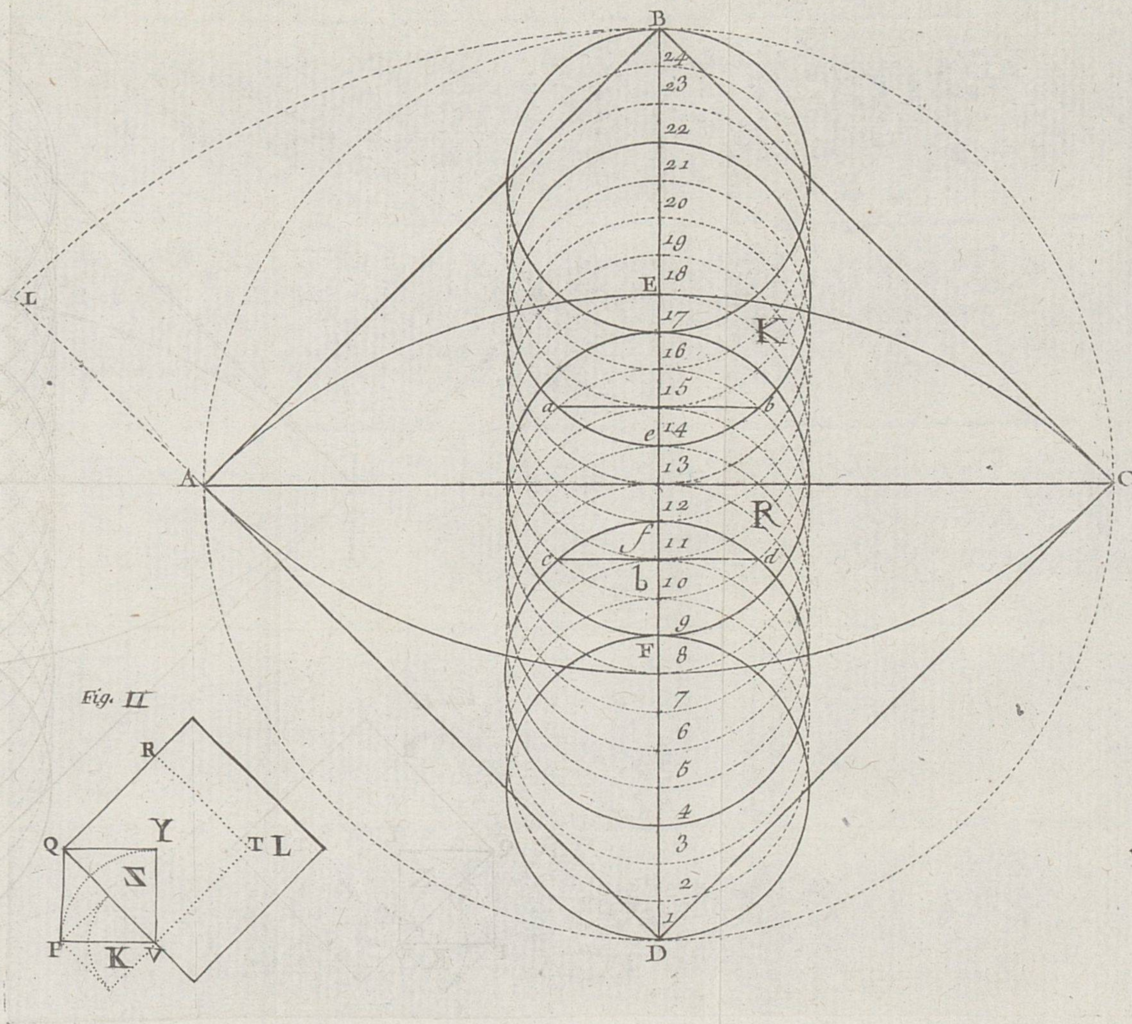
SCHOLIE.

Dans cette construction, le quarré circonscrit H I F G est toujours double du quarré inscrit A B C D, parce que la diagonale A C du dernier est toujours le côté du premier ; ce qui sera démontré Chapitre IV des Problêmes.

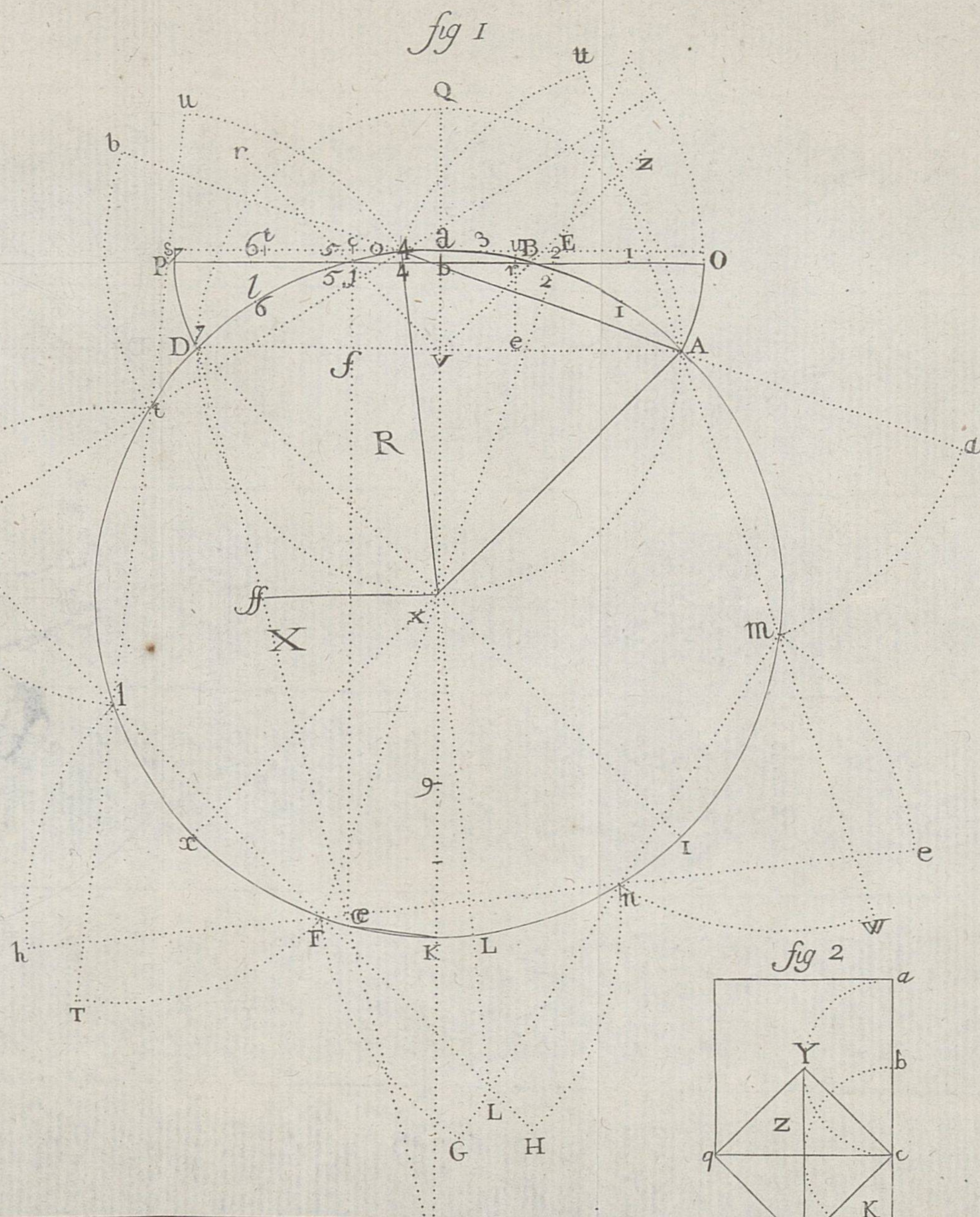
&c.

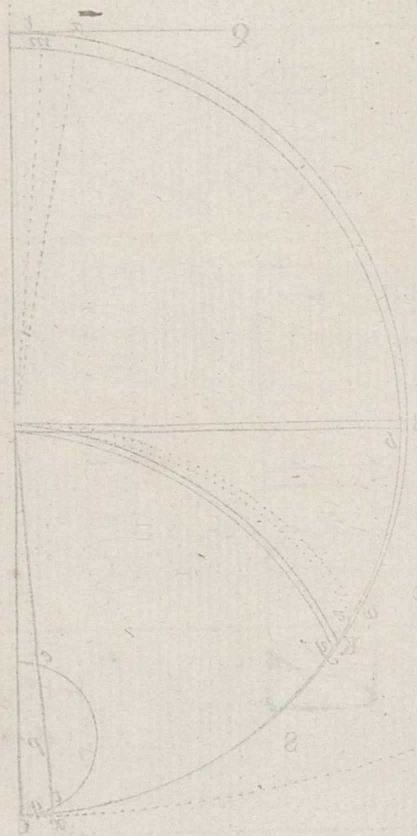
PL. I.

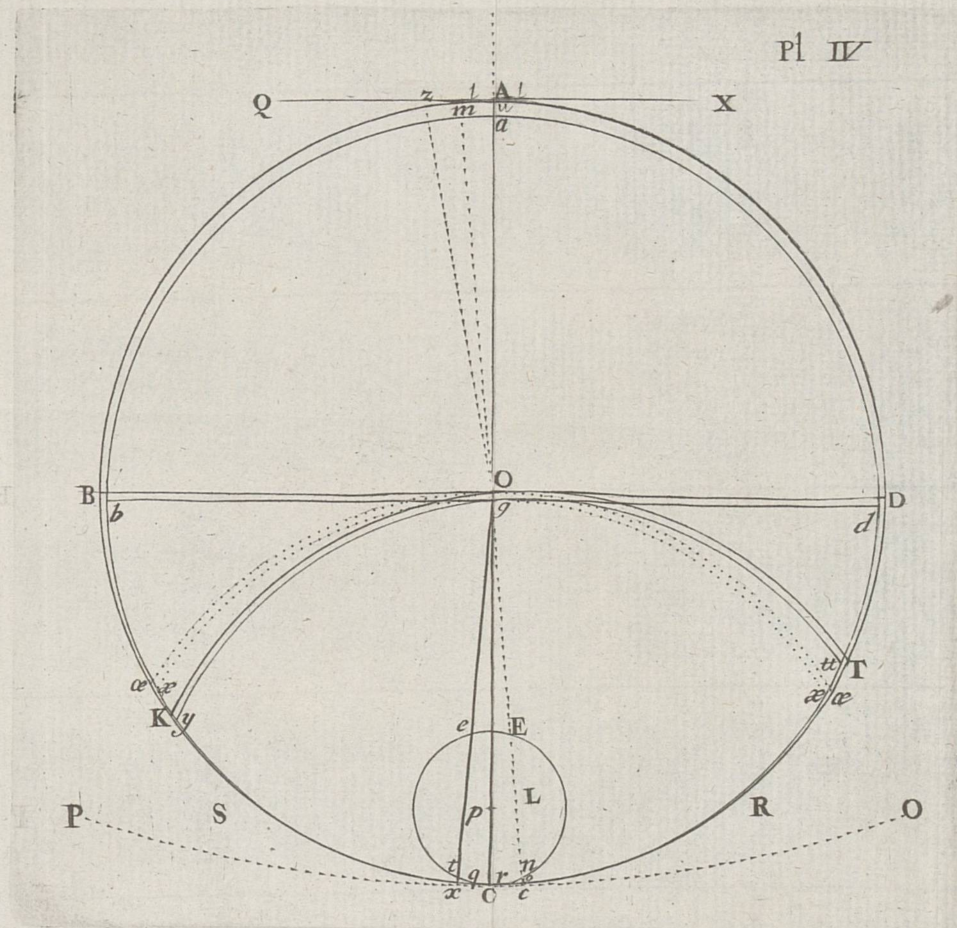
PL.II.



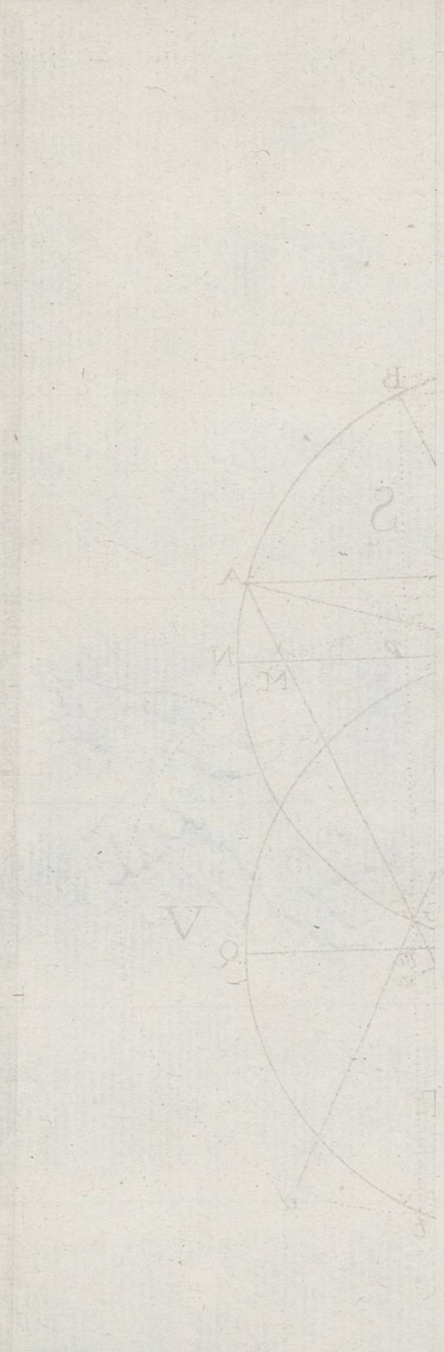
B
A
C
D
E
F
K
R
a
b
c
d
e
f
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Fig. II
Q
R
T
L
Y
Z
F
K
V


fig 1
fig 2

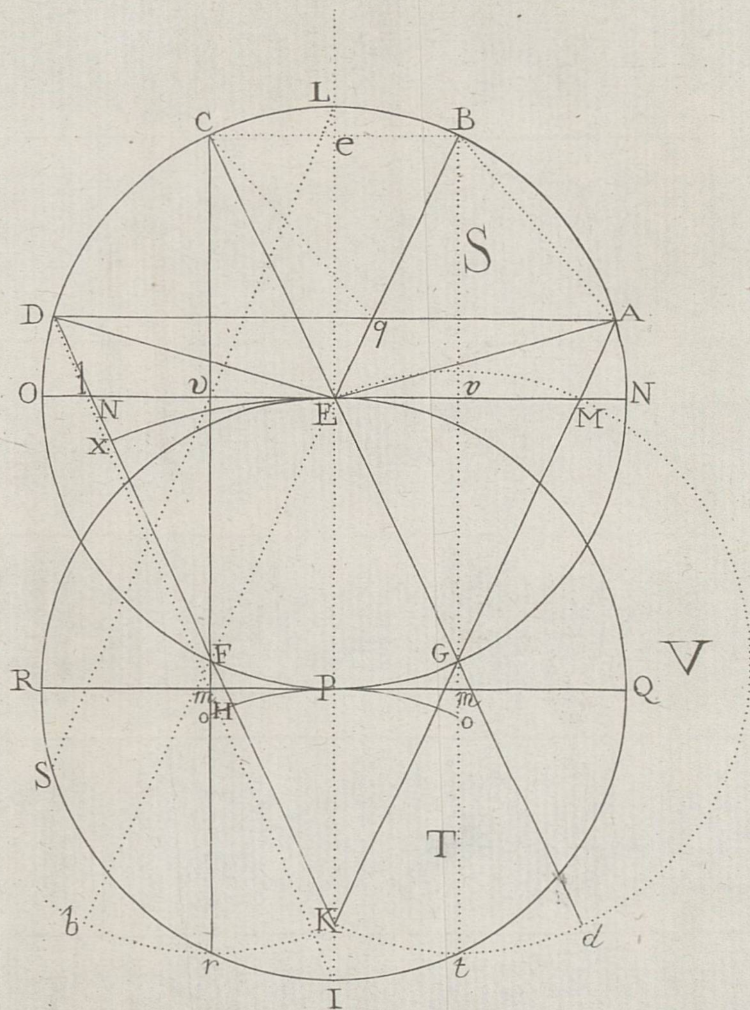



Pl IV
Q
z
t
A
m
a
X
O
B
b
g
D
d
tt
T
æ
x
æ
æ
K
y
e
E
L
p
P
S
R
O
t
q
r
n
x
C
c

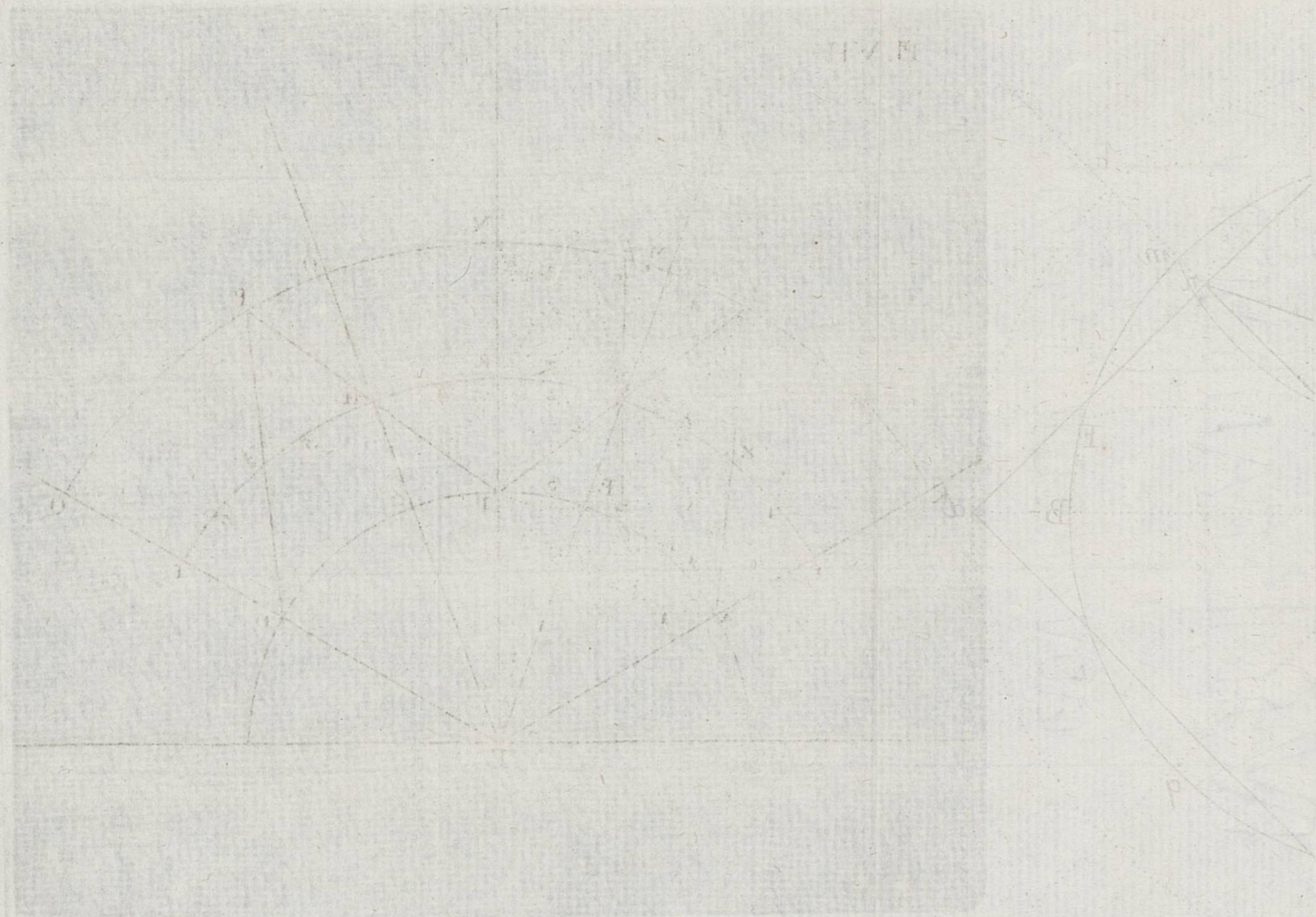
Pl. V.



Pl.VI



PL.VII



Pl. VIII

fig. I.

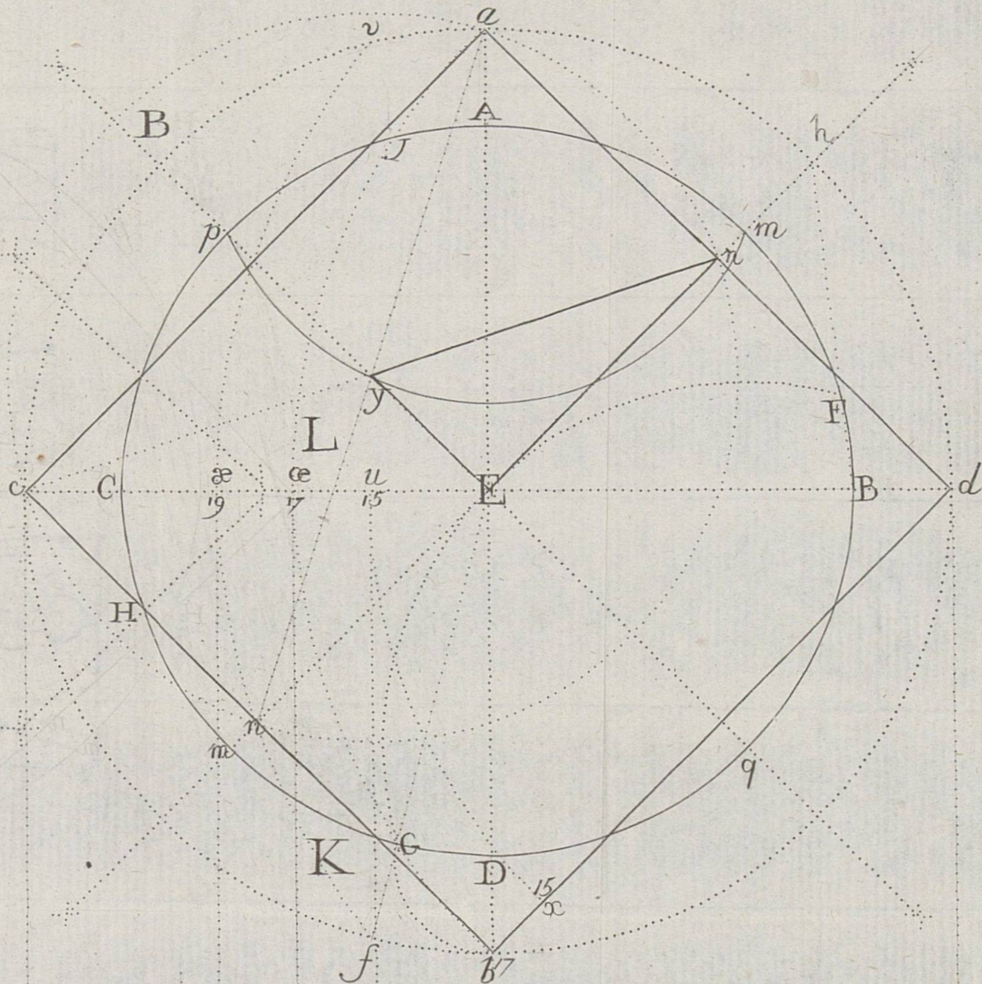
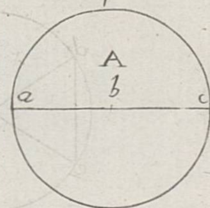


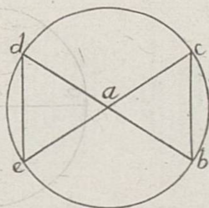
fig. II.

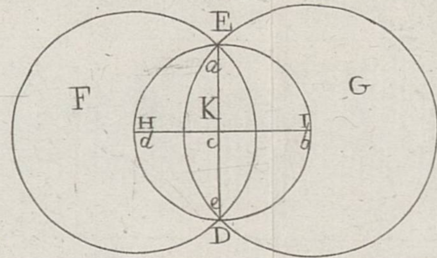
Pl, IX

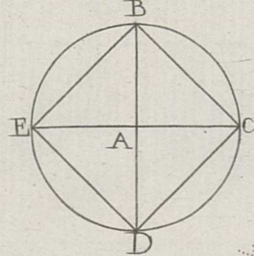
c v t d A
e
a
z
C
b
r s
X B

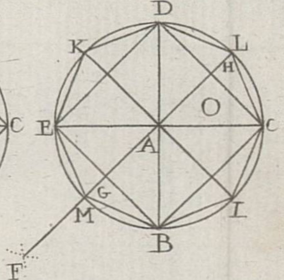
Pl. 1

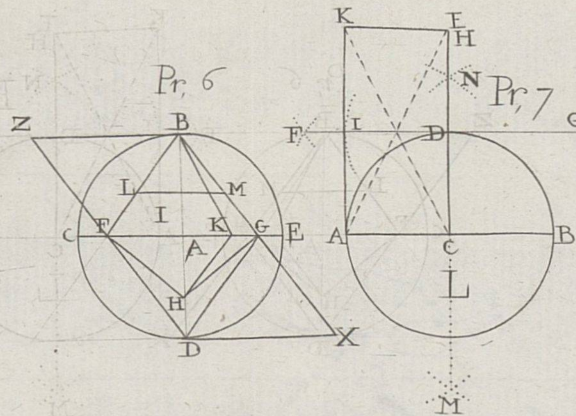

Propo, 1
A
b
a
c

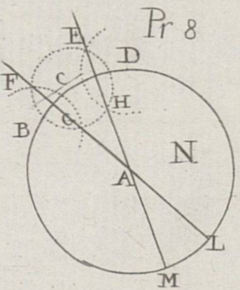

Pr, 2
d
c
a
e
b

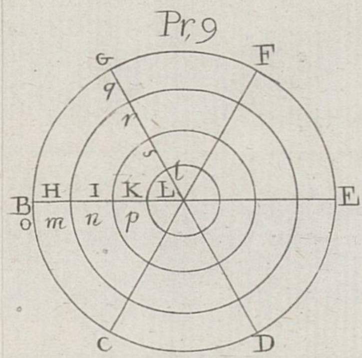

Pr. 3.
E
F
G
a
K
H
I
d
c
b
e
D

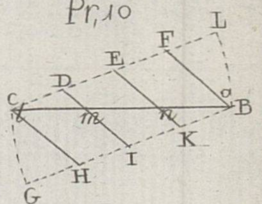

Pr, 4
B
E
A
C
D

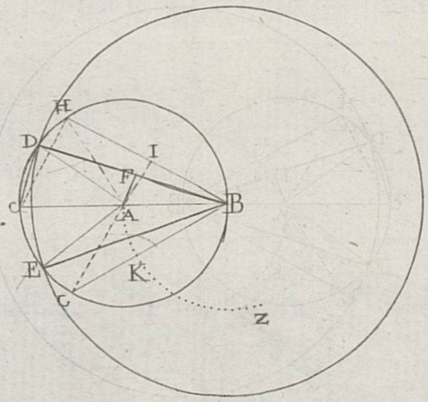

Pr, 5
D
K
L
H
E
O
C
A
G
M
I
B
F

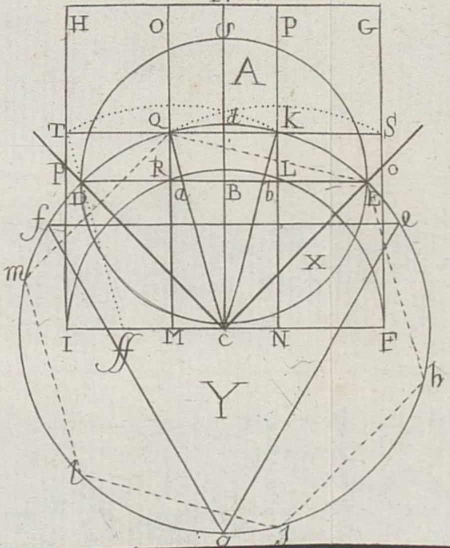

Pr, 6
Z
B
L
M
I
C
F
K
G
E
A
H
D
X
Pr, 7
K
E
H
N
F
I
D
G
A
C
B
L
M

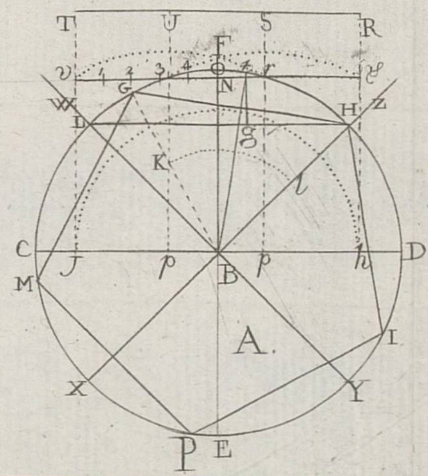

Pr 8
E
D
F
C
H
B
N
A
L
M


Pr, 9
G
F
q
r
s
t
H
I
K
L
B
o
m
n
p
E
C
D

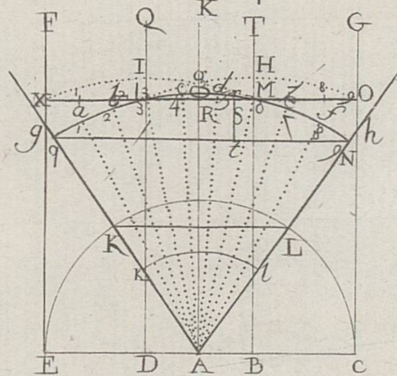

Pr, 10
L
F
E
D
C
m
n
B
o
G
H
I
K


Pr 11
H
D
I
F
C
A
B
E
K
G
Z

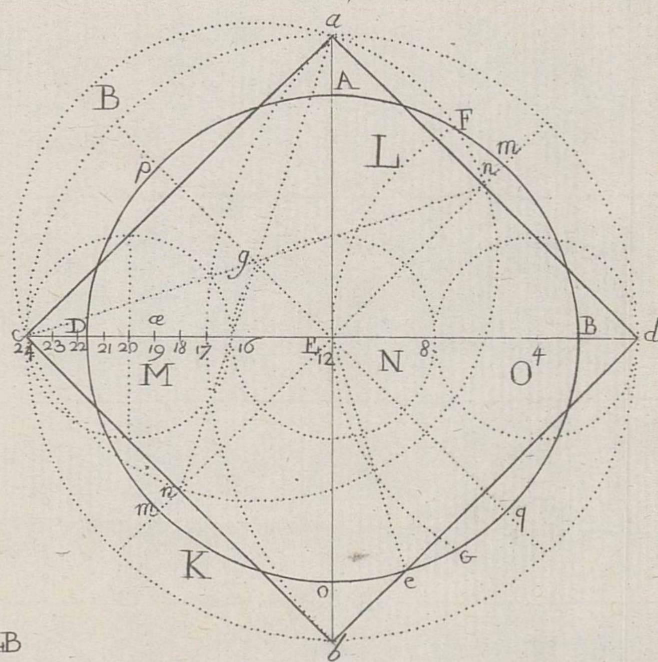

Pr 12
H
O
P
G
A
T
Q
K
S
R
L
B
X
I
M
C
N
F
Y
h


Pr, 13
T
U
S
R
F
N
W
D
H
Z
K
g
l
C
B
D
M
A.
I
X
Y
P
E

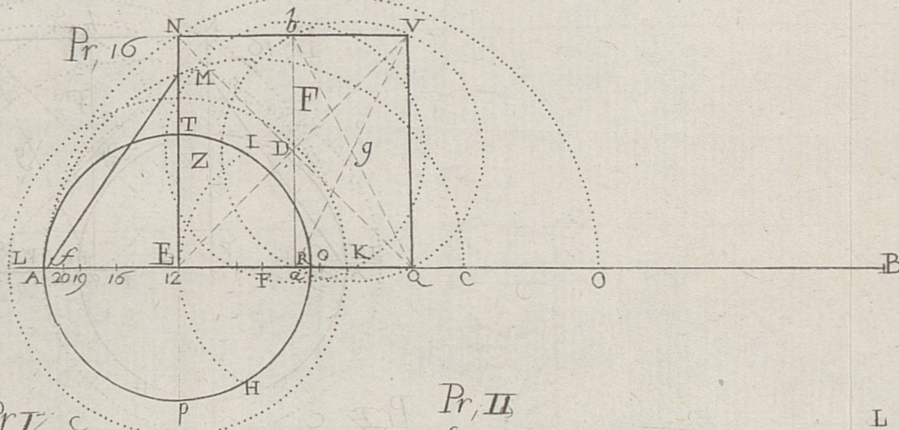
Pl. 2.



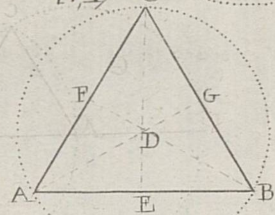
Pr, 14
F Q K T G
I H
X O
g h
N
K L
E D A B C



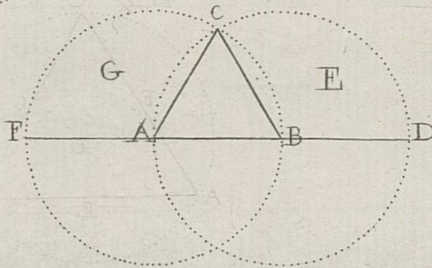
Pr, 15
a
A
B
F
L
m
n
p
g
c D æ E B d
24 23 22 21 20 19 18 17 16 12 8 4
M N O
n
m
q
K
G
o
e
b



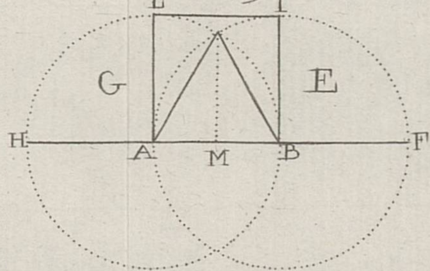
Pr, 16
N b V
M
T
F
Z
D
g
L
E
K
A 20 19 16 12 F Q C O B
H
P



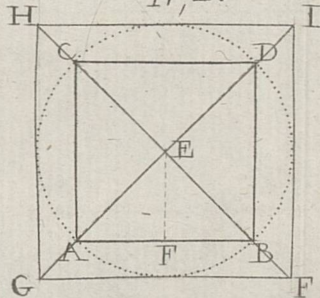
Pr, I
C
F G
D
A E B



Pr, II
C
G E
F A B D



Pr, III
L I
G E
H A M B F

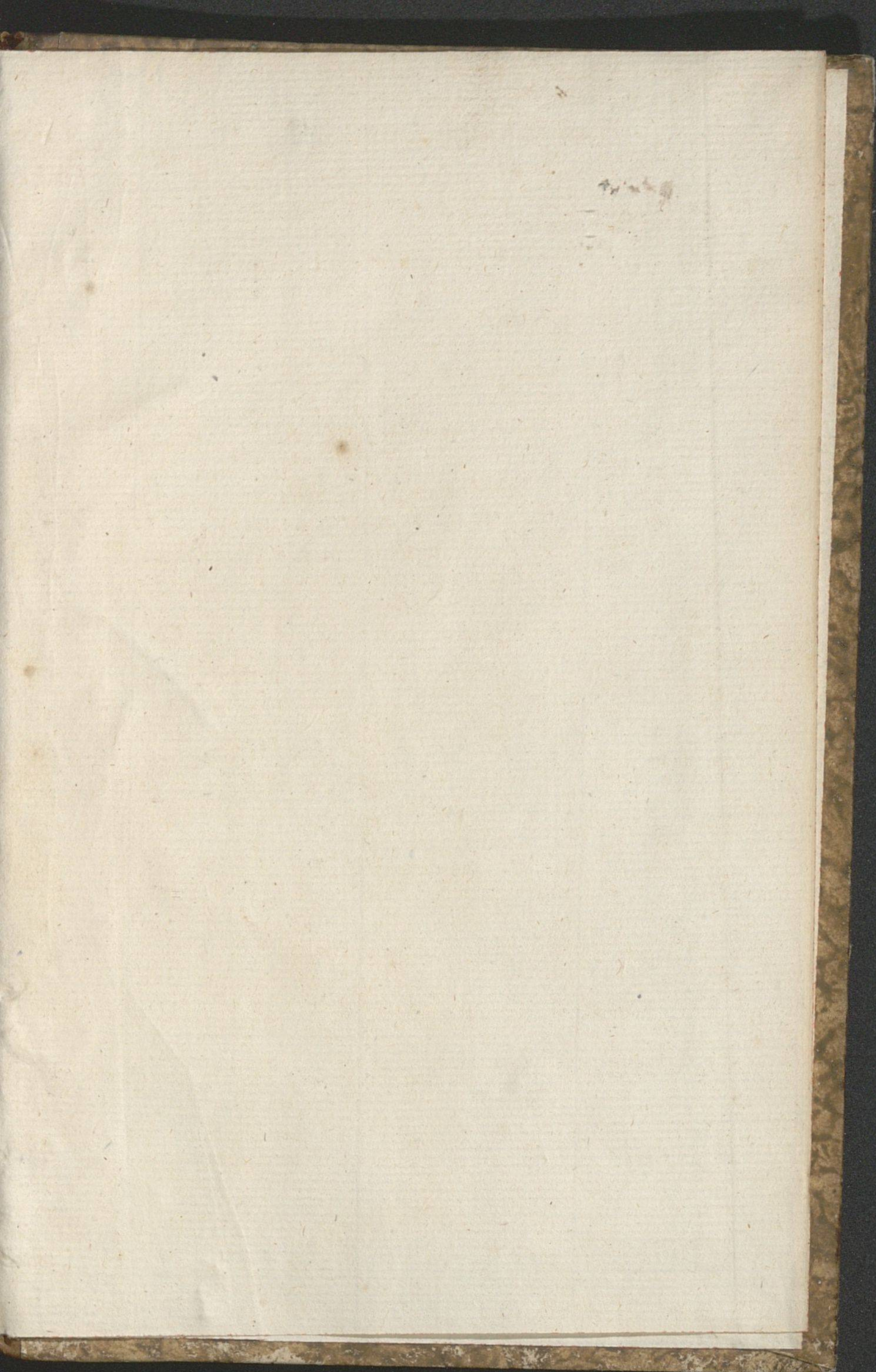


Pr, IV
H I
C D
E
A F B
G F

Corrections & Additions.

PAGE 7, *lig.* 28. équivalent, *lif.* équivalens.
P. 14, *lig.* 25. *l'hypotenuſe*, liſez *l'hypotenuſe & à l'échelle des trois quarrés duplicatifs & réduplicatifs* (Pl. II. fig. 2.)
P. 16, *ligne* 8. diagonale, *liſez* diagonale d'un quarré.
P. 20, *ligne* 30. & la diagonale *cp*, *liſez* & le côté *p d*.
P. 21, *ligne* 2. œK, *liſez* œK égale à ja.
P. 22, *ligne* 24. nos idées, *liſez* les idées.
Id. *ligne* 28. par les effets, *liſez* par les effets des cauſes &
P. 26, *ligne* 12. qui ſont, *liſez* qui lui ſont.
Id. *ligne* 18. des points réels ſenſibles, *liſez* des points ſenſibles.
P. 31, *lig.* 27. outre la ligne, *liſ.* entre la ligne.
P. 35, *ligne* 14. petit c & grand C, *liſez* petit c grand C.
P. 43, *ligne* 12. quarrés Y, Z K, *liſez* quarrés duplicatifs & réduplicatifs Y, Z K.
Id. *ligne* 19. meſure de ſurface quarrée, *liſez* meſure de la ſurface d'un quarré double.
Id. *ligne* 23. quadrupe 34, *liſez* quadrupe Y, 34.
P. 59, *ligne* 2. dôté, *liſez* côté.
Id. *ligne* 15. iſoſcele égal à, *liſez* iſoſcele par ſes côtés égal à.
Id. *ligne* 26. double du, *liſez* double de la baſe du
P. 65, *ligne* 28. de Géomètres Arpenteurs; *liſez* de Géomètres.
P. 74, *ligne* 5. ne peut pas fournir, *liſez* ne peut fournir.

Page 75, *ligne* 20. erreur proportionnelle, *lis.* erreur de calcul proportionnelle.
P. 76, *ligne* 5. l'attraction qui, *lisez* l'attraction impuissante sur les corps en repos qui.
P. 80, *ligne* 27. la matiete, *lisez* la matiere.
P. 81, *ligne* 9. ces parties, *lisez* ses parties.
P. 82, *ligne* 2. & une, *lisez* & d'une.
P. 88, *ligne* 1. idées pour l'évidence, & qu'il *lisez* idées fictices pour l'évidence, qu'il.
Id. *ligne* 5. d'avec les autres genres de quantités, *lisez* d'avec d'autres genres de quantités indéterminables.
P. 89, *ligne* 19. ponctué I K, *lisez* ponctué K.
P. 93, *ligne* 13. fermeroit, *lisez* formeroit.
P. 106, *ligne* 28. & leur évite, *lisez* & évite.
P. 121, *ligne* 16. omologue, *lisez* homologue.
P. 122, *ligne* 11. arcs omologues, *lisez* arcs homologues.
Id. *ligne* 12. omologues, *lisez* homologues.
Id. *ligne* 21. omologues, *lisez* homologues.








ELEMEN
DES F.
CENTRAL



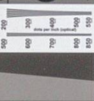
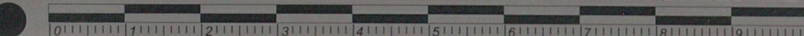


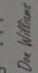










	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87	L*
-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17	a*
0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46	b*
0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42										

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams